RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

Per le Note e Memorie che sorpassano le 16 pagine di stampa, rimane a carico dell'Autore la *spesa di composizione* delle pagine eccedenti, in ragione di L. 3,15 per ogni pagina o parte di essa.

Gli Autori che desiderano *Estratti* delle Note e Memorie inserite nei Rendiconti, sono vivamente pregati di avvertirne la *Redazione* nell'atto di rinviare le prove di stampa. A fine di agevolare i soci nella pubblicazione dei loro lavori, gli estratti saranno ad essi mandati a mano a mano che procede la stampa del fascicolo.

Il prezzo degli estratti è regolato come segue:

Per un foglio di 8 pagine, o meno:

50 esemplari=L. 5; 100=L. 7, 75; 150=L. 11; 200=L. 13, 75; 250=L. 17.

Per ogni foglio successivo di pagine 8, o parte di esso (oltre la spesa di composizione, come sopra, per le pagine eccedenti i due fogli di stampa):

50 esemplari = L. 3, 75; 100 = L. 5, 25; 150 = L. 7, 25; 200 = L. 8, 75; 250 = L. 10, 75.

REDAZIONE: 28, via Ruggiero Settimo — Palermo.

Tipografia e Fonderia di Caratteri di M. AMENTA, via Vittorio Emanuele, 431, Palermo.
Proto-Compositore: S. Luminaria.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO III. — ANNO 1889.

PARTE PRIMA : MEMORIE E COMUNICAZIONI.

PALERMO,

SEDE DELLA SOCIETÀ

28, via Ruggiero Settimo, 28

1889

MEMORIE E COMUNICAZIONI.

SULLE CURVE FONDAMENTALI

DEI SISTEMI LINEARI DI CURVE PIANE ALGEBRICHE,

del prof. E. **Bertini**, a Pavia.

Adunanza del 25 novembre 1888.

I sistemi lineari, a cui si riferiscono le cose seguenti, non sono tutti i possibili, ma quelli soltanto che soddisfano alla condizione *di avere i punti fondamentali* (cioè i punti comuni a tutte le curve del sistema) *affatto indipendenti fra loro*. Nella qual condizione è compresa l'altra, che i detti punti sieno a distanza finita, e quindi che una curva generica del sistema abbia r rami variabili in ogni punto fondamentale r^{uplo}, giacchè, se alcuno fosse fisso, ciò significherebbe che a quel punto è infinitamente vicino qualche altro punto fondamentale.

Inoltre supporremo che i sistemi lineari non soddisfino ad altre condizioni diverse da quelle date dalla esistenza dei punti fondamentali; il che non è alcuna limitazione nell'argomento del presente lavoro. Infatti, se al sistema dato si sostituisce l'altro nel quale sono tralasciate le dette condizioni, non variano manifestamente le proprietà delle curve fondamentali.

Dimostreremo qui, con procedimento direi quasi elementare, varie proprietà delle curve fondamentali, e in particolare una (n° 10), finora

non osservata, dalla quale si trae, in modo molto semplice, la dimostrazione di un notevole teorema dovuto a Cremona (*).

I.

1. Rappresenti S un sistema lineare, ∞^{α}, di curve di genere p e ordine n, avente punti fondamentali r_1^{uplo}, r_2^{uplo}, ... in punti, di cui indicheremo le posizioni (affatto indipendenti) con 1, 2, ... Una curva generica del sistema sia semplice (cioè irriduttibile) (**); e suppongasi $\alpha > 1$, perchè le considerazioni seguenti non sono applicabili ai fasci. Sussistono evidentemente le due relazioni

$$(1) \qquad \sum r_i^2 = n^2 + 1 - p - \alpha$$

$$(2) \qquad \sum r_i = 3n - 1 + p - \alpha.$$

Due (o più) punti fondamentali i, j di una stessa moltiplicità per una curva generica del sistema, tali cioè che sia $r_i = r_j$, si diranno *equimultipli*; e *tutti* quelli (due almeno) di una stessa moltiplicità si dirà che costituiscono un *gruppo*. Un punto fondamentale, unico della sua moltiplicità, si chiamerà *isolato*.

2. *Curva fondamentale* del sistema lineare è ogni curva semplice che non incontri in punti variabili una curva generica del sistema stesso. Una tal curva si indicherà in seguito col simbolo $[m, s_i]$, se m è il suo ordine e sono s_1, s_2, ... ordinatamente le sue moltiplicità nei punti fondamentali 1, 2, ... Per la definizione data si avrà

(*) Questo teorema fu trovato dal Cremona per induzione [§ 25 della Nota II^a sulle *Trasformazioni geometriche delle figure piane* (*Memorie dell'Accad. delle Scienze di Bologna*, serie 2^a, tomo V.)]; e poi fu dimostrato rigorosamente da Clebsch (*Mathem. Annalen*, t. IV, p. 494-496). La dimostrazione di Clebsch fu riprodotta con alcune modificazioni nel n° 30 delle *Mélanges sur les transformations géométriques des figures planes* (*Bulletin des sciences math. et astron.*, série I, tome V, année 1873).

(**) Cfr. la mia Nota: *Sui sistemi lineari* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, vol. XV, serie II, pag. 24).

la relazione

(3) $$\sum s_i r_i = mn.$$

Se una curva composta non incontra in punti variabili una curva generica del sistema lineare, le curve semplici che la compongono godono della stessa proprietà e sono quindi fondamentali.

Si chiamerà *gruppo* di curve fondamentali l'insieme di *tutte* le curve fondamentali (due almeno) di uno stesso ordine; e curva *isolata* una curva fondamentale unica del suo ordine.

3. *Una curva fondamentale è determinata dalle sue moltiplicità nei punti fondamentali.* Giacchè, se non fosse, per un punto arbitrario passerebbero (almeno) una di tali curve e una curva di S, semplici amendue, e quindi, per la (3), coincidenti. Allora, avendosi, per la stessa (3), $\Sigma r_i^2 = n^2$, il sistema S sarebbe un fascio di curve (razionali).

4. Ne risulta, i punti fondamentali essendo affatto indipendenti fra loro, che per una curva fondamentale $[m, s_i]$ si ha

$$\frac{m(m+3)}{2} = \sum \frac{s_i(s_i+1)}{2}.$$

Ponendo

$$p' = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i-1)}{2},$$

si ha quindi

$$\sum s_i^2 = m^2 + 1 - p'$$

$$\sum s_i = 3m - 1 + p'.$$

Ora le curve di S passanti per un punto arbitrario della curva fondamentale $[m, s_i]$, si spezzano, per la (3), in questa curva e in un sistema residuo S', il quale è $\infty^{\alpha-1}$. Ma, per rigore, deve farsi l'ipotesi che la curva fondamentale possa staccarsi β volte ($\beta \geqq 1$); e allora una curva generica di S' sarà di ordine $n - \beta m$ ed avrà il punto fondamentale i^{esimo} multiplo secondo $r_i - \beta s_i$. La qual ultima affermazione segue dall'osservare che, se la moltiplicità fosse $> r_i - \beta s_i$, ag-

giungendo ad S' la curva fondamentale β volte, si otterrebbe un sistema (appartenente ad S), $\infty^{\alpha-1}$, di curve aventi nel punto i^{esimo} una moltiplicità $> r_i$, il che condurrebbe alla conseguenza che nel punto stesso una curva generica di S avrebbe tutte le tangenti fisse. Inoltre il sistema S' non può soddisfare a condizioni che non sieno conseguenza di quelle espresse dai detti punti $(r_i - \beta s_i)^{\text{upli}}$, giacchè se ne esistessero altre indipendenti, tralasciandole, si avrebbe un sistema più che $\alpha - 1$ volte infinito, e quindi, aggiungendo la curva fondamentale β volte, si avrebbe un sistema (almeno) ∞^{α}, avente tutte le particolarità di S, il che non può essere. Adunque il sistema S' è della stessa specie di S e si ha la relazione

$$2(\alpha - 1) + \sum (r_i - \beta s_i)(r_i - \beta s_i + 1) = (n - \beta m)(n - \beta m + 3),$$

cioè, per le (1), (2), (3) e per le due formole precedenti,

$$-2 - \beta(\beta + 1)(p' - 1) = 0.$$

Dunque deve essere $p' < 1$ e però $p' = 0$, e allora $\beta = 1$. Si conclude che *una curva fondamentale è razionale* (*): e inoltre che una curva fondamentale non può avere punti multipli fuori dei punti fondamentali del sistema e che si stacca una volta sola da una curva del sistema obbligata a passare per un suo punto.

Cioè si ha per una curva fondamentale $[m, s_i]$

$$\sum s_i^2 = m^2 + 1 \tag{4}$$

$$\sum s_i = 3m - 1 \tag{5}$$

(*) Per la rigorosa dimostrazione di questo teorema il Caporali accenna ad un'ulteriore limitazione per il sistema lineare, oltre quella già ammessa [Cfr. Nota al n° 2 della Memoria: *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve piane algebriche* (*Memorie di Geometria di* E. Caporali, Napoli, 1888 — pag. 173)]. Risulta dalla dimostrazione qui fatta che quella ulteriore limitazione non occorre.

e, per il sistema S',

$$\sum (r_i - s_i)^2 = (n - m)^2 + 2 - p - \alpha$$

$$\sum (r_i - s_i) = 3\ (n - m) + p - \alpha\,;$$

onde le curve variabili di S, S' sono dello stesso genere.

La curva fondamentale $[m,\ s_i]$ e una curva generica di S' si segano in

$$m(n - m) - \sum s_i (r_i - s_i) = 1$$

punto variabile.

5. *Se la moltiplicità di un punto fondamentale i è maggiore di quella di un altro punto fondamentale j; sarà, per una curva fondamentale qualsivoglia $[m,\ s_i]$, la moltiplicità nel primo punto maggiore o eguale a quella nel secondo:* cioè, se $r_i > r_j$, sarà $s_i \geqq s_j$. Giacchè se fosse $s_i < s_j$ e quindi

$$\frac{s_i(s_i+1)}{2} + \frac{s_j(s_j+1)}{2} - \frac{(s_i+1)(s_i+2)}{2} - \frac{(s_j-1)s_j}{2} = s_j - s_i - 1 \geqq 0,$$

potremmo considerare una curva C di ordine m (semplice o composta) avente nei punti $1,\ 2,\ \ldots$ le stesse moltiplicità di $[m,\ s_i]$, salvo che in i la moltiplicità $s_i + 1$ e in j la moltiplicità $s_j - 1$. Questa curva C (variabile in una $\infty^{s_j - s_i - 1}$) segherebbe una curva generica di S in un numero di punti dato da

$$nm - r_1 s_1 - r_2 s_2 - \ldots - r_i(s_i + 1) - \ldots - r_j(s_j - 1) - \ldots = r_j - r_i < 0,$$

il che è assurdo.

Se si suppone $r_i = r_j$ ed $s_i < s_j$ la considerazione precedente non conduce ad alcuno assurdo. Si trova anzi che C è fondamentale e quindi deve essere determinata (n° 3), cioè deve aversi $s_j - s_i - 1 = 0$. Troveremo in seguito questa proprietà con altre che la completano, per diversa via (n° 8).

6. Siano $[m, s_i]$ ed $[m', s'_i]$ due curve fondamentali qualunque. Si consideri una curva di ordine $m - m'$ avente nel punto fondamentale i la moltiplicità $s_i - s'_i$. Per questa curva il numero delle condizioni meno disponibili è, in virtù delle (4), (5),

$$\frac{(m-m')(m-m'-3)}{2} - \sum\frac{(s_i-s'_i)(s_i-s'_i-1)}{2} = mm' - \sum s_i s'_i.$$

Se adunque fosse $mm' - \sum s_i s'_i > 0$, siccome dalla (5) segue

$$\sum(s_i - s'_i)s_i = (m - m')m,$$

si avrebbe una curva variabile, semplice o composta (di cui l'insieme delle due curve fondamentali costituirebbe una posizione particolare), che segherebbe una curva generica di S nei soli punti fondamentali: la qual cosa contraddice alle proprietà del n° 2. Adunque si ha

$$(6) \qquad \sum s_i s'_i = mm',$$

cioè: *due curve fondamentali si segano soltanto in punti fondamentali.*

7. *Se l'ordine di una curva fondamentale $[m, s_i]$ è maggiore dell'ordine di un'altra curva fondamentale $[m', s'_i]$; sarà, in un punto fondamentale qualsivoglia, la moltiplicità della prima curva maggiore o eguale a quella della seconda;* cioè se $m > m'$, sarà $s_i \geqq s'_i$. In vero, consideriamo una curva C, di ordine m', avente nei punti $1, 2, \ldots$ le stesse moltiplicità di $[m', s'_i]$, tranne che nel punto i la moltiplicità $s'_i - 1$.

Questa curva C [per essere $\frac{s'_i(s'_i+1)}{2} - \frac{(s'_i-1)s'_i}{2} = s'_i$] varia in una

∞^1 e sega la curva $[m, s_i]$ in

$$mm' - s_1 s'_1 - s_2 s'_2 - \ldots - s_i(s'_i - 1) - \ldots = s_i$$

punti variabili. Ora, se fosse $s_i < s'_i$, la curva $[m, s_i]$ dovrebbe coincidere o far parte di quella curva C che fosse condotta per s'_i punti della stessa curva $[m, s_i]$; il che non può essere, essendo $m' < m$.

L'assurdo cessa se, essendo sempre $s_i < s'_i$, sia $m = m'$. Allora la curva C, condotta per $s_i + 1$ punti di $[m, s_i]$ deve coincidere con questa curva e quindi (n° 3) essere determinata; cioè deve aversi $s'_i = s_i + 1$: il che di nuovo rientra in una proprietà che dimostreremo nel n.° seguente.

8. Consideriamo due curve fondamentali (distinte) dello stesso ordine m e sieno $[m, s_i]$, $[m, s'_i]$. Sussistono le relazioni (4), (6); cioè

$$(A) \qquad \begin{cases} m^2 + 1 = \sum s_i^2 \\ m^2 + 1 = \sum s_i'^2 \\ m^2 = \sum s_i s'_i . \end{cases}$$

Dalla somma delle due prime sottraendo il doppio della terza, si trova

$$2 = \sum (s_i - s'_i)^2,$$

il secondo membro della quale è una somma di numeri interi positivi. Segue, non potendo essere $(s_i - s'_i)^2 = 2$, che deve essere $(s_i - s'_i)^2 = 1$ per *due* valori di i ed $(s_i - s'_i)^2 = 0$ per tutti gli altri valori di i. Quei due valori di i sieno, ad esempio, 1, 2: e si avrà

$$(B) \qquad \begin{cases} s_1 - s'_1 = \varepsilon \\ s_2 - s'_2 = \varepsilon' \\ s_i - s'_i = 0 \qquad\qquad (i = 3, 4, \ldots), \end{cases}$$

ove ε, ε' rappresentano ciascuno ± 1. Ma la (3) dà

$$n m = \sum s_i r_i\,, \quad n m = \sum s'_i r_i$$

e sottraendo, per le (B),

$$r_1 \varepsilon + r_2 \varepsilon' = 0,$$

da cui $\varepsilon = -\varepsilon'$, $r_1 = r_2$ (*). Infine dalla prima delle (A) sottraendo la terza e tenendo presenti le (B), si ricava

$$1 = s_1 \varepsilon + s_2 \varepsilon' = (s_1 - s_2)\varepsilon;$$

onde se $\varepsilon = 1$: $\qquad s_2 = s_1 - 1$

se $\varepsilon = -1$: $\qquad s_2 = s_1 + 1.$

Si conclude che *due curve fondamentali dello stesso ordine hanno in ogni punto fondamentale la stessa moltiplicità, salvo che in due punti fondamentali equimultipli. Se una curva ha in uno di questi la moltiplicità* s, *avrà nell'altro punto la moltiplicità* $s \pm 1$, *e l'altra curva avrà ordinatamente negli stessi due punti le moltiplicità* $s \pm 1$, s *(corrispondendosi i segni inferiori e superiori).*

Possiamo fissare arbitrariamente che abbia luogo uno qualunque dei due casi (per es. quello in cui le ricordate moltiplicità sono rispettivamente s, $s+1$; $s+1$, s) scegliendo opportune denominazioni.

9. Si indichino con C, C' le due curve fondamentali dello stesso ordine m, dianzi considerate, aventi nei punti fondamentali

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots,$$

ordinatamente le moltiplicità

$$s+1,\ s,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ \ldots\ (C)$$

$$s,\ s+1,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ \ldots\ (C').$$

(*) Anche dalla (5), cioè dalle

$$\Sigma s_i = 3m - 1,\ \Sigma s'_i = 3m - 1,$$

sottraendo si ha, per le (B), $\varepsilon + \varepsilon' = 0$.

Vogliamo ricercare ciò che accade pei punti del gruppo a cui appartengono 1, 2 e per gli altri gruppi di punti.

Se $r_3 = r_2 = r_1$, si consideri una curva C'' dello stesso ordine m di C, C' e avente nei detti punti fondamentali rispettivamente le moltiplicità

$$s_3,\ s,\ s+1,\ s_4,\ s_5,\ \ldots\ (C'')$$

cioè le stesse moltiplicità di C, C', colla sola differenza che nei punti 1, 2, 3 le moltiplicità sono diversamente distribuite. Questa curva C'' esiste perché esistono C e C' e perchè i punti fondamentali sono affatto indipendenti; ed è fondamentale, perchè, essendo 1, 2, 3 equimultipli, le intersezioni di C'' con una curva generica di S sono quanto quelle di C e di C'. Applicando alle due curve C', C'' il teorema del n° 8, si noti che i due punti fondamentali equimultipli, di cui è parola in quel teorema, non possono essere che 1, 2 ovvero 2, 3, giacchè in 2 la moltiplicità delle due curve è già differente e, se è eguale in 1, deve essere differente in 3 e viceversa. Ne segue, per lo stesso teorema, che deve essere $s_3 = s$ ovvero $s_3 = s + 1$. Facciasi un caso, ad es., $s_3 = s$. Allora, se fosse inoltre $r_1 = r_4$, ripetendo il ragionamento fatto per C'', per una curva di ordine m avente ordinatamente nei sunnominati punti fondamentali le moltiplicità

$$s_4,\ s,\ s+1,\ s,\ s_5,\ \ldots,$$

e confrontando questa curva con C' si osserverebbe essere già diverse le moltiplicità in 2, 3, e però dovere essere, sempre per il teorema del n° 8, $s_4 = s$. Avendo supposto invece $s_3 = s + 1$, avremmo concluso che si aveva $s_4 = s + 1$.

Sia invece r_3 diverso da r_1 ed $r_3 = r_4$: dico che si avrà $s_3 = s_4$. Si fà un ragionamento analogo al precedente, cioè si considera una curva (d'ordine m) avente nei ricordati punti fondamentali rispettivamente le moltiplicità

$$s,\ s+1,\ s_4,\ s_3,\ s_5,\ \ldots,$$

e questa si paragona alla curva C. Le due curve hanno già nei punti 1, 2 moltiplicità diverse; onde, per il teorema del n° 8, devono averle altrove eguali e quindi deve essere $s_3 = s_4$.

Ricordando le definizioni dei n^i 1, 2 si ha dunque questo risultato che: *ciascuna di due curve fondamentali dello stesso ordine ha in tutti i punti di un gruppo, al quale non appartengono i due punti equimultipli indicati nel teorema del* n° 8, *la stessa moltiplicità (la medesima per le due curve); mentre, se per i detti due punti una curva ha ordinatamente le moltiplicità* s, $s+1$ e *l' altra le* $s+1$, s (teorema del n° 8), *ciascuna curva ha in tutti gli altri punti del gruppo a cui essi appartengono la stessa moltiplicità* s, *ovvero* $s+1$ (*e pure la medesima per le due curve).*

Invece *una curva fondamentale isolata ha in tutti i punti di un gruppo qualunque la stessa moltiplicità.* Perchè, se essendo $r_1 = r_2$, una curva fondamentale di ordine m ha in 1, 2 le moltiplicità differenti s_1, s_2, esiste un'altra curva di ordine m, diversa da quella, la quale ha in 1, 2 le moltiplicità s_2, s_1 e in tutti gli altri punti fondamentali le stesse moltiplicità della curva considerata e che è pure fondamentale e però ecc.

10. Si continui a considerare le due curve fondamentali C, C' (n° 9): e si chiami G quel particolare gruppo di punti fondamentali indicato nel teorema del n° 9. I punti fondamentali di G sieno

$$1,\ 2,\ \ldots,\ i$$

e, per fissare le idee, facciasi uno dei due casi possibili, cioè che le moltiplicità di C, C' sieno rispettivamente nei punti di questo gruppo, ad esempio,

$$s+1,\ s,\ s,\ \ldots,\ s \quad (C)$$

$$s,\ s+1,\ s,\ \ldots,\ s. \quad (C')$$

Sia C'' una terza curva fondamentale *qualsivoglia* di ordine m. Per C, C'' (e così per C, C') il particolare gruppo deve essere ancora G, perchè, nei punti di ogni altro gruppo C ha, per il teorema del n° 9, una medesima moltiplicità. Dunque, per lo stesso teorema, in tutti i punti di un gruppo diverso da G le due curve C, C'' (e così C, C') hanno una stessa moltiplicità, e nei punti di G la curva C'' avrà, sem-

pre per quel teorema, una moltiplicità $s + 1$ e tutte le altre s. Ma la moltiplicità $s + 1$ non potrà essere in 1, nè in 2, altrimenti C'' coinciderebbe con C o con C' (n° 3). La moltiplicità $s + 1$ sarà (ad es.) in 3; cioè C'' avrà in tutti i punti le stesse moltiplicità di C, C' e nei punti di G ordinatamente le moltiplicità

$$s, \; s, \; s + 1, \; s, \; \ldots, \; s.$$

Deve essere adunque $i \geqq 3$. Viceversa, se ciò avviene, esiste sempre la curva fondamentale C'' (cfr. n° 9). Collo stesso ragionamento, avendosi una quarta curva fondamentale C''' di ordine m si dimostra che deve avere in tutti gli altri punti fondamentali le stesse moltiplicità di C, C', C'' e nei punti di G (ad esempio) le

$$s, \; s, \; s, \; s + 1, \; s, \; \ldots, \; s;$$

onde deve essere $i \geqq 4$; e viceversa, se ciò accade, una tal curva C''' esiste certamente. Continuando, si conclude l'esistenza di i curve fondamentali dello stesso ordine m e di i soltanto.

Alla stessa conseguenza si arriva nell'altro caso, cioè quando C, C' abbiano nei punti di G le moltiplicità

$$s, \; s + 1, \; s + 1, \; \ldots, \; s + 1$$

$$s + 1, \; s, \; s + 1, \; \ldots, \; s + 1$$

ossia (ponendo $s - 1$ in luogo di s) le

$$s - 1, \; s, \; s, \; \ldots, \; s$$

$$s, \; s - 1, \; s, \; \ldots, \; s.$$

Si ha quindi il

Teorema. — *Ogni gruppo di i (> 1) curve fondamentali è coordinato ad un gruppo di i punti fondamentali. Ciascuna curva del gruppo ha in tutti i punti del gruppo coordinato la stessa moltiplicità s, tranne che in un punto ove ha la moltiplicità $s + 1$ ovvero $s - 1$; ed ha in-*

vece in tutti i punti di un gruppo non coordinato la medesima moltiplicità σ. I numeri s, σ sono gli stessi per tutte le curve del gruppo — : nel quale sono compresi i teoremi dei n' 6, 7.

Cioè, se (ad esempio) si ha

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_h > r_{h+1} = r_{h+2} = \ldots = r_{h+i} > r_{h+i+1} = r_{h+i+2} = \ldots = r_{h+i+k} > \ldots$$

e sono $h+1$, $h+2$, ..., $h+i$ i punti del gruppo coordinato ad un gruppo di curve, le i curve di questo gruppo avranno ordinatamente le moltiplicità

$$\sigma,\ \sigma,\ \ldots,\ \sigma,\ s \pm 1,\ s,\ \ldots,\ s,\ \tau,\ \tau,\ \ldots,\ \tau,\ \ldots,$$

$$\sigma,\ \sigma,\ \ldots,\ \sigma,\ s,\ s \pm 1,\ \ldots,\ s,\ \tau,\ \tau,\ \ldots,\ \tau,\ \ldots,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\sigma,\ \sigma,\ \ldots,\ \sigma,\ s,\ s,\ \ldots,\ s \pm 1,\ \tau,\ \tau,\ \ldots,\ \tau,\ \ldots,$$

dovendosi prendere per tutte il segno $+$ ovvero per tutte il segno —.

Si può osservare che, per il teorema del n° 5, deve essere $\sigma > s \geqq \tau \geqq \ldots$ ovvero $\sigma \geqq s > \tau \geqq \ldots$, secondochè si prenda il segno $+$ ovvero il segno —.

11. Non viceversa ogni gruppo di punti è coordinato ad un gruppo di curve. Ad es. il sistema di quartiche aventi tre punti doppi e due punti semplici fondamentali ha le tre sole rette fondamentali congiungenti i punti doppi che costituiscono un gruppo coordinato al gruppo di questi punti, ma il gruppo dei due punti semplici non ha alcun gruppo coordinato di curve fondamentali.

Sarebbe interessante ricercare le condizioni necessarie e sufficienti per le quali ha luogo la proprietà inversa della precedente. Per ora ci limitiamo qui ad un caso particolare nel quale la inversa è vera.

II.

12. Si abbia un sistema S omaloidico di curve. È noto che con esso si può costruire una trasformazione univoca fra due piani e che quindi dal sistema dato nasce un nuovo sistema omaloidico S_1. È noto inoltre che ad ogni curva fondamentale di S corrisponde un punto fondamentale di S_1 e reciprocamente; che l'ordine di una curva fondamentale e la moltiplicità del punto fondamentale corrispondente sono eguali, e infine che la moltiplicità di una curva fondamentale in un punto fondamentale di S è eguale alla moltiplicità del punto fondamentale corrispondente per la curva fondamentale corrispondente di S_1 (*). Colle quali proprietà, applicando al sistema S_1 il teorema del n° 10 e ritornando poi al sistema S, si trova facilmente che *anche ogni gruppo di punti è coordinato ad un gruppo di curve.*

E allora facciasi il ragionamento noto: cioè si osservi che, essendo il numero dei punti fondamentali eguale al numero delle curve fondamentali, e la totalità delle curve dei gruppi eguale alla totalità dei punti dei gruppi, deve essere il numero delle curve isolate eguale al numero dei punti isolati. Adunque, raccogliendo: — *Se un sistema omaloidico ha α_1 punti semplici, α_2 punti doppi, α_3 punti tripli, ... fondamentali, e inoltre β_1 rette, β_2 coniche, β_3 cubiche, ... fondamentali, i numeri α sono eguali ai numeri β presi nello stesso o altro ordine*—; che è il ricordato teorema di Cremona.

13. Dal quale teorema Jung ha dedotto un teorema analogo per i sistemi S che hanno il numero dei punti fondamentali (affatto indipendenti) eguale a quello delle curve fondamentali. Le considerazioni che conducono a questa generalizzazione sono le seguenti.

In primo luogo si osservi che *un sistema di punti* 1, 2, 3, 4, ..., *affatto indipendenti, sottoposti ad una trasformazione quadratica, di cui i punti fondamentali sieno tre,* 1, 2, 3, *dei punti stessi, dà origine ad un nuovo sistema di punti* 1', 2', 3', 4', ... (*di cui* 1', 2', 3' *sono omologhi di* 1, 2, 3 *e* 4', ..., *i corrispondenti di* 4, ...) *pu-*

(*) Cfr. i già citati *Mélanges sur les transformations géométriques des figures planes.*

re affatto indipendenti. Giacchè, se (ad es.) un punto $4'$ fosse successivo ad $1'$, ne seguirebbe che i punti 2, 3, 4 sarebbero in linea retta, contrariamente al supposto. E in generale, ad ogni relazione di posizione fra i punti $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, ... corrisponde, per la trasformazione quadratica, una relazione di posizione fra i punti 1, 2, 3, 4, ... (*).

Un sistema lineare S sottoposto ad una trasformazione quadratica di cui i tre punti fondamentali sieno punti fondamentali di S, produrrà adunque un nuovo sistema della stessa specie (cioè a punti fondamentali pure affatto indipendenti). Si effettuino successivamente tali trasformazioni quadratiche, adoperando i tre punti fondamentali di ordine massimo e continuando fino a che si trova un sistema lineare S_1, il cosidetto sistema minimo, nel quale la somma delle moltiplicità dei tre punti fondamentali di ordine massimo non supera l'ordine delle curve del sistema. Il sistema S_1 sarà privo di curve fondamentali (**); non potrà cioè accadere il caso eccezionale (***) che presentì due punti fondamentali e una retta fondamentale (che li congiunge), *quando*, come sempre si suppone nel seguito del presente

---

(*) Se per una curva Γ di ordine k avente in 1, 2, 3, 4, ... punti t_1 uplo, t_2 uplo, t_3 uplo, t_4 uplo, ... esistessero θ vincoli, cioè delle condizioni espresse da queste moltiplicità fossero θ conseguenza delle rimanenti, sarebbe

$$\frac{k(k+3)}{2}+\gamma-\theta=\frac{t_1(t_1+1)}{2}+\frac{t_2(t_2+1)}{2}+\dots,$$

indicando γ il numero d'infinità del sistema nel quale Γ varia (se Γ è determinata, $\gamma=0$).

La trasformata di Γ è dell'ordine $2k-t_1-t_2-t_3$, ha in 1, 2, 3, 4, ... punti $(k-t_2-t_3)$uplo, $(k-t_1-t_3)$uplo, $(k-t_1-t_2)$uplo, t_4 uplo, ... e varia pure in una moltiplicità ∞^γ. Onde, se fossero θ' i vincoli per la trasformata, si avrebbe

$$\frac{(2k-t_1-t_2-t_3)(2k-t_1-t_2-t_3+3)}{2}+\gamma-\theta'=$$

$$=\frac{(k-t_2-t_3)(k-t_2-t_3+1)}{2}+\frac{(k-t_1-t_3)(k-t_1-t_3+1)}{2}$$

$$+\frac{(k-t_1-t_2)(k-t_1-t_2+1)}{2}+\frac{t_4(t_4+1)}{2}+\dots$$

Dalle due relazioni precedenti segue $\theta=\theta'$. Nel caso nostro è sempre $\theta=\theta'=0$.

(**) Caporali, l. c., n° 3.

(***) Caporali, l. c., n° 4.

n°, *ci limitiamo ai sistemi S dotati della proprietà che la differenza fra il numero dei punti fondamentali e quello delle curve fondamentali sia zero.* Giacchè Jung ha dimostrato (*) che questa differenza non si altera per una trasformazione cremoniana e nel detto caso eccezionale la nominata differenza sarebbe eguale ad 1. Segue poi, dall'essere quella differenza costante e dall'essere nullo il numero delle curve fondamentali di S_1, che è pure nullo il numero dei punti fondamentali di S_1: ossia S_1 è costituito da tutte le curve di uno stesso ordine μ. Onde S (come S_1) è $\infty^{\frac{\mu(\mu+3)}{2}}$; una curva variabile del sistema è di genere $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}$ e due curve si segano in μ^2 punti variabili.

Consideriamo la trasformazione cremoniana che conduce da S_1 ad S: e dicansi R_1 la rete omaloidica nel piano di S_1 ed R quella nel piano di S, date dalla detta trasformazione. Un punto fondamentale di R_1 non giace sopra una curva generica di S_1 e però la curva corrispondente a quel punto per la trasformazione, curva fondamentale per R_1, è pure fondamentale per S: e reciprocamente ad una curva fondamentale di S deve corrispondere un punto, non una curva, perchè una tal curva sarebbe pure fondamentale per S_1. Ancora: una curva fondamentale di R_1 di ordine x è segata da una curva generica di S_1 in μx punti variabili e quindi le corrisponde un punto fondamentale, x^{uplo} per R e $(\mu x)^{\text{uplo}}$ per S: e reciprocamente un punto fondamentale di S deve avere per corrispondente una curva, fondamentale per R_1, e però ecc. Dunque *i punti e le curve fondamentali di R sono tutti e soli i punti e le curve fondamentali di S, eccetto che la moltiplicità di un punto fondamentale per S è μ^{upla} di quella dello stesso punto per R.*

Le proprietà del sistema R, dette nel n°. 12, si trasportano quindi immediatamente al sistema S; cioè, *per un sistema lineare (a punti fondamentali affatto indipendenti), pel quale il numero dei punti fondamentali è eguale a quello delle curve fondamentali, anche ogni gruppo di punti è coordinato ad un gruppo di curve;* e quindi: *se un tal*

(*) *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, serie II, tomo XV), n° 20.

sistema ha α_1 *punti* μ^{pli}, α_2 *punti* $(2\mu)^{\text{upli}}$, α_3 *punti* $(3\mu)^{\text{upli}}$, ... *fondamentali e inoltre* β_1 *rette*, β_2 *coniche*, β_3 *cubiche*, ... *fondamentali*, *i numeri* α *sono eguali ai numeri* β *presi nello stesso o altro ordine* (*).

14. Nel numero precedente abbiamo applicata la proprietà, dovuta a Jung, che *la differenza fra il numero dei punti fondamentali e quello delle curve fondamentali di un sistema lineare S è costante per una trasformazione quadratica* (*epperò per una successione di esse, cioè per una trasformazione cremoniana*). Termineremo il presente lavoro col dare di questa proprietà una dimostrazione assai semplice. Sia S il sistema primitivo, S_1 il trasformato; e dicansi f_p, f_c rispettivamente il numero dei punti fondamentali e quello delle curve fondamentali di S. Il triangolo fondamentale (nel piano di S) della trasformazione quadratica con cui si passa da S ad S_1, contenga i vertici e j lati pure fondamentali per S (potendo avere ciascuno dei numeri i, j uno dei valori 0, 1, 2, 3). I rimanenti $f_p - i$ punti fondamentali di S produrranno altrettanti punti fondamentali di S_1 e le rimanenti $f_c - j$ curve fondamentali di S, altrettante di S_1. Inoltre S_1 conterrà altri $3 - j$ punti fondamentali corrispondenti alle rette non fondamentali per S del detto triangolo (perchè queste rette sono segate in punti variabili da una curva generica di S) e altre $3 - i$ rette fondamentali corrispondenti ai punti non fondamentali per S del triangolo stesso (perchè questi punti non esistono sopra una curva generica di S): e manifestamente null'altro. Dunque S_1 possiede $f_p - i + 3 - j$ punti fondamentali ed $f_c - j + 3 - i$ curve fondamentali e la differenza di questi due numeri è $f_p - f_c$. C. D. D.

Tredozio, ottobre 1888.

AGGIUNTA.—Il teorema del n° 10 mostra che ogni gruppo di i curve fondamentali è coordinato ad un gruppo di i punti fondamentali *e ad uno solo.*

Si aggiunga che *non possono due gruppi di curve fondamentali es-*

(*) Jung, l. c., n° 52.

sere coordinati al medesimo gruppo di punti. In vero, ritenendo l'esempio del detto n° 10, abbiasi un'altra curva fondamentale d'ordine $m' \left(\gtrless m\right)$ avente nei punti

$$(A) \qquad h+1,\ h+2,\ \ldots,\ h+i$$

ordinatamente moltiplicità

$$\theta',\ \theta,\ \ldots,\ \theta.$$

Questa curva sega la prima curva del gruppo ivi considerato in

$$\theta'(s \pm 1) + (i-1)s\theta + X = mm'$$

punti, se si indica con X il numero totale delle intersezioni raccolte nei punti fondamentali diversi dai punti (A); e parimenti sega ogni altra curva dello stesso gruppo in

$$\theta' s + \theta(s \pm 1) + (i-2)s\theta + X = mm'$$

punti. Sottraendo una relazione dall'altra, risulta

$$\theta' = \theta;$$

il che dimostra che la curva fondamentale d' ordine m' considerata non appartiene ad un gruppo coordinato al gruppo (A), giacchè in tal caso doveva essere $\theta' = \theta \pm 1$.

Pavia, 30 dicembre 1888.

E. BERTINI.

UN TEOREMA SULL' HESSIANA D' UNA FORMA BINARIA.

Nota del dott. **F. Gerbaldi**, a Roma.

Adunanza del 23 dicembre 1888.

Per una forma binaria cubica è noto, che se i tre punti della forma sono reali e distinti, i due punti dell' Hessiana sono imaginari. Questa proprietà è un caso particolare del seguente teorema per una forma binaria di grado qualunque a coefficienti reali:

Se tutti i punti d'una forma sono reali e distinti, l'Hessiana ha tutti i punti imaginari, e prende soltanto valori negativi; se poi tutti i punti della forma sono reali, ma alcuni sono multipli, l' Hessiana ha ogni punto r^{plo} della forma come punto $2(r-1)^{plo}$, all' infuori di questi non ha punti reali e prende soltanto valori negativi. — Se l'Hessiana ha tutti i punti imaginari ed è costantemente positiva, la forma ha altresì tutti i punti imaginari.

La dimostrazione di questo teorema è fondata su d' una identità che anzitutto vogliamo stabilire.

Una forma $f = a_x^n = a'^n_x$ sia il prodotto di due forme

$$\varphi = \alpha_x^p = \alpha'^p_x \quad \text{e} \quad \psi = \beta_x = \beta'^q_x \quad (p + q = n);$$

di queste ci occorrono i seguenti covarianti

$$J = (\alpha\beta)\alpha_x^{p-1}\beta_x^{q-1} \qquad \Delta_{11} = (\alpha\alpha')^2\alpha_x^{p-2}\alpha'^{p-2}_x$$

$$\Delta_{12} = (\alpha\beta)^2\alpha_x^{p-2}\beta_x^{q-2} \qquad \Delta_{22} = (\beta\beta')^2\beta_x^{q-2}\beta'^{q-2}_x.$$

Proponiamoci di formare la Hessiana di f, $H = (aa')^2 a_x^{n-2} a'^{n-2}_x$; a questo scopo prendiamo la seconda polare di f

$$(1)\ n(n-1)a_x^{n-2}a_y^2 = p(p-1)\alpha_x^{p-2}\alpha_y^2.\psi + 2pq\alpha_x^{p-1}\beta_x^{q-1}\alpha_y\beta_y + q(q-1)\beta_x^{q-2}\beta_y^2.\varphi,$$

la quale, in virtù dell'identità

$$(2)\qquad 2\alpha_x\beta_x\alpha_y\beta_y = \alpha_x^2\beta_y^2 + \alpha_y^2\beta_x^2 - (\alpha\beta)^2(xy)^2$$

si può scrivere

$$(3)\ n(n-1)a_x^{n-2}a_y^2 = p(n-1)\alpha_x^{p-2}\alpha_y^2.\psi - pq\Delta_{12}(xy)^2 + q(n-1)\beta_x^{q-2}\beta_y^2.\varphi.$$

Qui poniamo successivamente

$$y_1 = a'_2,\ y_2 = -a'_1; \qquad y_1 = \alpha_2,\ y_2 = -\alpha_1; \qquad y_1 = \beta_2,\ y_2 = -\beta_1$$

e moltiplichiamo i due membri rispettivamente per a'^{n-2}_x, α_x^{p-2}, β_x^{q-2}; avremo:

$$n(n-1)H = p(n-1)(a\alpha)^2a_x^{n-2}\alpha_x^{p-2}\psi - pq\Delta_{12}\varphi\psi + q(n-1)(a\beta)^2a_x^{n-2}\beta_x^{q-2}.\varphi$$

$$n(n-1)(a\alpha)^2a_x^{n-2}\alpha_x^{p-2} = p(n-1)\Delta_{11}\psi + q(q-1)\Delta_{12}\varphi$$

$$n(n-1)(a\beta)^2a_x^{n-2}\beta_x^{q-2} = p(p-1)\Delta_{12}\psi + q(n-1)\Delta_{22}\varphi$$

e finalmente moltiplicando la prima di queste uguaglianze per n, la seconda per $p\psi$ e la terza per $q\varphi$, e poi sommando membro a membro si ricava

$$(4)\ n^2(n-1)H = p^2(n-1)\Delta_{11}\psi^2 - 2pq\Delta_{12}\varphi\psi + q^2(n-1)\Delta_{22}\varphi^2.$$

Questa formola esprime l'Hessiana del prodotto di due forme come funzione quadratica di queste, essendo coefficienti i secondi scorrimenti. Se si ha presente la nota identità

$$(5)\qquad 2J^2 = -\Delta_{11}\psi^2 + 2\Delta_{12}\varphi\psi - \Delta_{22}\varphi^2$$

la formola, cui siamo giunti, si può anche scrivere come segue:

$$(6)\quad n(n-1)H = p(p-1)\Delta_{11}\psi^2 - \frac{2pq}{n}J^2 + q(q-1)\Delta_{22}\varphi^2.$$

Nel calcolo ora fatto si è implicitamente supposto $p > 1$, $q > 1$. Quando è $q = 1$ e quindi $\psi = \beta_x$ (essendo ancora $p > 1$), alla (1) bisogna sostituire quest'altra

$$n\, a_x^{n-2} a_y^2 = (p-1)\alpha_x^{p-2}\alpha_y^2 .\, \psi + 2\alpha_x^{p-1}\alpha_y \beta_y$$

e, per potere a questa applicare la (2), conviene prima moltiplicarne i due membri per $\psi = \beta_x$, donde si ha

$$n\, a_x^{n-2} a_y^2 .\, \psi = p\,\alpha_x^{p-2}\alpha_y^2 .\, \psi^2 - \Delta_{12}(xy)^2 + \beta_y^2 .\, \varphi.$$

Ed ora seguendo lo stesso procedimento di prima:

$$n H .\, \psi = p(a\alpha)^2 a_x^{n-2}\alpha_x^{p-2} .\, \psi^2 - \Delta_{12}\varphi\psi + (a\beta)^2 a_x^{n-2} .\, \varphi$$

$$n(a\alpha)^2 a_x^{n-2}\alpha_x^{p-2} .\, \psi = p\,\Delta_{11}\psi^2$$

$$n(a\beta)^2 a_x^{n-2} .\, \psi = (p-1)\Delta_{12}\psi^2$$

donde si deduce, nel caso di $q = 1$:

$$(7)\qquad n^2 H = p^2\Delta_{11} .\, \psi^2 - 2\Delta_{12}\varphi.$$

Quando è $q = 1$, anche la (5) si modifica:

$$2J^2 = 2(\alpha\beta)(\alpha'\beta)\alpha_x^{p-1}\alpha'^{p-1}_x = \alpha_x^{p-2}\alpha'^{p-2}_x[(\alpha\beta)^2\alpha'^2_x + (\alpha'\beta)^2\alpha_x^2 - (\alpha\alpha')^2\beta_x^2]$$

$$(8)\qquad 2J^2 = 2\Delta_{12}\varphi - \Delta_{11}\psi^2,$$

mercè la quale, la (7) si può anche scrivere

$$(9)\qquad n^2 H = (p^2-1)\Delta_{11}\psi^2 - 2J^2$$

e questa si accorda colla (6) quando si faccia $q = 1$.

Premesse queste formole, passiamo alla dimostrazione del teorema enunciato. Cominciamo dal caso in cui i punti della forma sono tutti reali e distinti. Dimostreremo che il teorema vale per le forme di grado n, quando esso sia verificato per le forme di grado inferiore ad n. Ammettiamo pertanto che, quando sono reali e distinti tutti i punti d'una forma di grado inferiore ad n, la Hessiana non si annulli mai per valori reali di $x_1 : x_2$ e per conseguenza prenda sempre valori dello stesso segno, e precisamente ammettiamo che questi valori siano costantemente negativi.

È facile verificare la verità di questa ipotesi per le forme di 2° e di 3° grado. L'Hessiana d'una forma di 2° grado $\alpha_x^2 = \alpha_0 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2$ è l'invariante $(\alpha\alpha')^2 = 2(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2)$, e questo (come è noto) è negativo quando i due punti della forma sono reali e distinti. Sia poi una forma di 3° grado a_x^3, e si scomponga nel prodotto di due fattori $\alpha_x^2 \beta_x$; se i tre punti di a_x^3 sono reali, saranno reali i due punti di α_x^2, e quindi sarà $(\alpha\alpha')^2 = \Delta_{11} < 0$; allora dalla (9) per $n = 3$ segue che l'Hessiana di a_x^3 consta di due termini essenzialmente negativi.

Consideriamo ora una forma a_x^n di grado n composta di punti tutti reali e distinti; essa si può in varie maniere scomporre nel prodotto di due forme $\alpha_x^p \beta_x^q$ di grado inferiore, le quali hanno ciascuna tutti i punti reali e distinti; quindi per l'ipotesi fatta si ha costantemente $\Delta_{11} < 0$ e $\Delta_{22} < 0$. Ma allora la formola (6) fa vedere che l'Hessiana di a_x^n consta di tre termini essenzialmente negativi, e questi per uno stesso valore di $x_1 : x_2$ non si possono annullare separatamente; perchè, se per uno stesso valore di $x_1 : x_2$ fossero insieme $\varphi = 0$ e $\psi = 0$, quel valore sarebbe radice multipla di $a_x^n = 0$. Dunque, se una forma ha tutti i punti reali e distinti, la Hessiana prende soltanto valori negativi ed ha tutti i suoi punti imaginari.

Resta ad esaminare il caso d'una forma dotata di punti tutti reali, tra cui ve ne siano alcuni multipli. Se $\beta\left(\frac{x_1}{x_2} = -\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$ è un punto q^{plo} di a_x^n, si potrà scrivere $a_x^n = \alpha_x^p \beta_x^q$, intendendo che i simboli β_1, β_2 abbiano valori effettivi, e che α_x^p non sia divisibile per β_x, e per conseguenza $(\alpha\beta)^p \lessgtr 0$. Allora si ha

$$\Delta_{22} = 0 \text{ identicamente, e } J = (\alpha\beta)\,\alpha_x^{p-1}.\beta_x^{q-1} = J_1.\beta_x^{q-1}$$

e così la (6) diventa

$$(10) \qquad n(n-1)H = p(p-1)\Delta_{11}.\beta_x^{2q} - \frac{2pq}{n} J_1^2 \beta_x^{2(q-1)}$$

donde appare che H contiene il fattore β_x alla potenza $2(q-1)$; non lo può contenere ad una potenza maggiore, altrimenti β_x dividerebbe J_1 e quindi per $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{\beta_2}{\beta_1}$ si avrebbe $J_1 = (\alpha\beta)^p = 0$. Dunque ogni punto q^{plo} della forma è un punto $2(q-1)^{plo}$ dell'Hessiana.

Se la forma a_x^n ha un solo punto multiplo β, α_x^p avrà soltanto punti semplici, e però l'Hessiana di α_x^p che è Δ_{11} sarà costantemente negativa; donde segue, in virtù della (10), che per i punti diversi da β sarà anche l'Hessiana di a_x^n costantemente negativa.

Ed ora ammesso il teorema per il caso di k punti multipli, è facile dimostrarlo per il caso di $k+1$ punti multipli. Se a_x^n ha $k+1$ punti multipli $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ si scomponga a_x^n nel prodotto $\alpha_x^p \beta_x^q$; la forma α_x^p ha k punti multipli $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, e quindi l' Hessiana di α_x^p, che è Δ_{11}, per i punti diversi da $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ è costantemente negativa; ma allora in virtù della (10) per i punti diversi da $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ anche l'Hessiana di a_x^n è costantemente negativa.

L'ultima parte del teorema è una immediata conseguenza della (9). Se la equazione $a_x^n = 0$ ha radici reali, sia ψ un fattore reale di primo grado di a_x^n; dalla (9) segue che, quando è $\psi = 0$, H è negativa; ossia *le radici reali di* $a_x^n = 0$ *sostituite nella Hessiana la rendono negativa*. Dunque, se l'Hessiana ha tutti i punti imaginari ed è costantemente positiva, la forma non può avere punti reali; sarà necessariamente di grado pari.

Roma, dicembre 1888.

F. GERBALDI.

UNA APPLICAZIONE DELLA GEOMETRIA ENUMERATIVA ALLE CURVE ALGEBRICHE,

di **Guido Castelnuovo**, a Torino.

Adunanza del 23 dicembre 1888.

In questo lavoro ci proponiamo due fini: esporre un metodo utile in molte ricerche della teoria delle curve; presentare alcune formole che ci sembrano notevoli e in se stesse, e per le loro conseguenze. A queste formole noi siamo giunti applicando il principio della *conservazione del numero* a curve degeneri (*). La trattazione diretta delle questioni, teoricamente preferibile, offre in questo caso gravi difficoltà.

Indicheremo con C_p^n una curva d'ordine n e genere p. *L'insieme di più curve d'ordine* $n_1, n_2, \ldots n_t$ e *di genere risp.* $p_1, p_2, \ldots p_t$ *dà una curva d'ordine* $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_t$ *e di genere*

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_t - (t-1) + i,$$

dove i è il numero totale delle intersezioni semplici delle curve date, a due a due; si suppone che le curve date si seghino in guisa, che si

(*) Spetta al sig. Schubert il merito di aver enunciato in modo preciso questo fecondo principio, e di averlo applicato a numerose questioni. *Vedi* il trattato *Kalkül der Abzählenden Geometrie*, e varie note pubblicate nei *Mathematische Annalen* e negli *Acta Mathematica*.

possa passare da una curva ad un'altra qualunque, percorrendo curve del sistema ed attraversando punti di intersezione. Il Nöther che dà la definizione del genere della curva complessiva (*), mostra che la curva gode le proprietà dipendenti da quel valore di p (serie di gruppi, intersezioni, ecc.). È quindi naturale di pensare che le proprietà e i numeri che dipendono solo dall'ordine e dal genere di una curva (**), si conservino , quando la curva si spezza in curve minori secondo la definizione precedente. Nel seguito parleremo soltanto di curve C_p^n composte di una C_{p-i+1}^{n-1} e di una retta secante l'ultima curva in i ($>$ 0) punti.

1. Gli spazi a r dimensioni S_r che segano in σ punti una curva C appartenente a S_s, formano un sistema di molteplicità

$$\tau = (r+1) - (s-r-1)(\sigma - r - 1),$$

o superiore; si suppone che τ non sia negativo. Se $\tau = 0$ il numero di questi S_r è (in generale) finito. Calcoleremo questo numero, dato l'ordine e il genere di C, nei due casi

1) $s = 2(r+1)$, $\sigma = r+2$;   2) $s = r+2$, $\sigma = 2(r+1)$.

Il numero degli spazi S_r che segano in $(r+2)$ punti una curva C_p^n di $S_{2(r+1)}$, è

$$(1)\quad \binom{n-r-1}{r+2} - p\binom{n-r-3}{r} + \binom{p}{2}\binom{n-r-5}{r-2} - \dots \text{(***)}$$

Indichiamo con $f(n, r)_p$ il valore di questa somma, qualunque siano gli interi n, r, p. La f sodisfa alle relazioni: .

(*) *Acta Mathematica*, VIII.

(**) Si è indotti a ritenere che i numeri dati nei paragrafi seguenti dipendano solo dall'ordine e dal genere della curva, dal fatto che nel piano e nello spazio ordinario quei numeri si possono calcolare con metodi più diretti in funzione dell'ordine e del genere *soltanto*

(***) Si arresti lo sviluppo al primo termine nullo; altrettanto per le formole seguenti.

$$\alpha)\ \begin{cases} f(n+1,\ r)_p\ = f(n,\ r)_p + f(n-1,\ r-1)_p, \\ f(n+1,\ r)_{p+1} = f(n,\ r)_p + f(n-2,\ r-1)_p, \\ f(n+1,\ r)_{p+1} = f(n+1,\ r)_p - f(n-3,\ r-2)_p. \end{cases}$$

Ammettiamo ora che la (1) dia il numero rischiesto per le curve degli spazi inferiori a $S_{2(r+1)}$; e in questo stesso spazio valga per la C_p^n; dimostreremo che in conseguenza la (1) vale per le curve d'ordine $n+1$ e di genere p o $p+1$ di $S_{2(r+1)}$.

La C_p^{n+1} si scinda in una C_p^n e in una retta g unisecante. Gli spazi S_r che segano in $(r+2)$ punti C_p^{n+1}, sono o spazi secanti in $(r+2)$ punti C_p^n, o spazi secanti in $(r+1)$ punti C_p^n e in un punto g.

Il numero dei primi è per ipotesi $f(n,\ r)_p$; il numero dei secondi è il numero degli S_{r-1} secanti in $(r+1)$ punti la C_p^{n-1} di S_{2r} proiezione di C_p^n da g, e questo numero è per ipotesi $f(n-1,\ r-1)_p$. Quindi il numero richiesto per C_p^{n+1} è

$$f(n,\ r)_p + f(n-1,\ r-1)_p = f(n+1,\ r)_p \qquad \text{per le } \alpha);$$

e ciò appunto si voleva dimostrare.

Nello stesso modo la C_{p+1}^{n+1} si scinda in C_p^n e in una retta bisecante; si troverà che il numero richiesto per C_{p+1}^{n+1} è dato da

$$f(n,\ r)_p + f(n-2,\ r-1)_p = f(n+1,\ r)_{p+1}.$$

Ora la (1) vale in ogni caso per $r=0$, e in $S_{2(r+1)}$ vale per le curve razionali ed ellittiche d'ordine $2(r+1)+1$; dunque la (1) vale per tutte le curve di $S_{2(r+1)}$, nelle quali

$$(A) \qquad n - p \geqq 2(r+1).$$

Quanto alle altre curve, dimostreremo che se la (1) vale per C_p^n, vale per ogni C_{p+i-1}^{n+1}, che possa degenerare in una C_p^n con una retta i-secante, g. Il numero degli S_r che segano in $(r+2)$ punti C_{p+i-1}^{n+1} è dato da $f(n,\ r)_p$, più un certo numero $f_1(n,\ r)_p$ che dipende dalla molteplicità di g nella varietà costituita dagli S_r $(r+1)$-secanti C_p^n. Si tratta soltanto di dimostrare l'uguaglianza

α') $$f(n+1,\ r)_{p+i-1} = f(n,\ r)_p + f_1(n,\ r)_p.$$

La via che si presenta è di calcolare $f_1(n, r)_p$ e poi di servirsi opportunamente delle α) per mostrare che il secondo membro si riduce al primo. Ma questo calcolo può esser evitato. Si riconosce anzitutto che $f_1(n, r)_p$ è somma di più funzioni del tipo di $f(n, r)_p$ per argomenti che non superano n, r. Poi si osserva che se per C^{n+1}_{p+i-1} (e quindi per C^n_p) vale una disuguaglianza analoga alla A) i termini componenti α') hanno significati geometrici precisi; e l'interpretazione geometrica mostra appunto che allora la α') deve sussistere. Dunque la α') è vera quando, dato r, e scelto p ad arbitrio, si prenda $n \geqq p + i - 2 + 2(r+1)$, cioè per infiniti valori di n; dunque la α') è una *identità*, poichè i vari termini che la compongono sono funzioni razionali di n, p. Ma se la (1) è vera per la C^n_p, il secondo membro della α') dà il numero degli spazi S_r $(r+2)$-secanti C^{n+1}_{p+i-1}, e la α') dice che questo numero può aversi dalla (1).

Così si trova che la (1) vale per moltissime curve che non sodisfanno alla A). Crediamo che da ogni curva mediante successive degenerazioni in curve minori e rette secanti si possa giungere ad una curva sodisfacente alla A). Però, siccome non possiamo fare questa affermazione in modo assoluto, si abbia cura, nell'applicare a casi numerici la (1), di osservare se in quei casi, coi metodi qui dati, o con vie analoghe, l'applicazione possa giustificarsi. Ciò valga anche per i paragrafi seguenti (*).

2. *Il numero degli spazi S_r secanti in $(2r+2)$ punti una C^n_p di S_{r+2} è dato da*

(2) $$\sum_0^{\,i} \frac{(-1)^i}{r+2-i} \binom{n-r-1-i}{r+1-i} \binom{n-r-2-i}{r+1-i} \binom{p}{i}.$$

(*) La (1) poteva anche dedursi da una formola di Brill e Nöther, che dà il numero di soluzioni di un sistema di equazioni provenienti dall'annullarsi di una matrice (*Math. Ann.*, VII).

Si notino i casi particolari della (1)

$$f(4\pi-3,\ \pi-2)_{2\pi} = \frac{1}{2\pi+1}\binom{2\pi+1}{\pi};\ f(3p-1,\ p-2)_p = 2^p.$$

Indichiamo questa somma con $\varphi(n, r)_p$; la φ ha la seguente proprietà:

β) $$\varphi(n+1, r)_{p+1} = \varphi(n+1, r)_p - \varphi(n-1, r-1)_p.$$

La formola (2) valga per ogni curva di S_{r+1}, e in S_{r+2} per la C_p^n e la C_p^{n+1}. Se la C_p^{n+1} si scinde nella C_p^n e in una retta g unisecante, il numero degli S_r che secano in $2r+1$ punti C_p^n e in un punto g, deve esser dato da

$$\varphi_1(n, r)_p = \varphi(n+1, r)_p - \varphi(n, r)_p.$$

Se la retta g si appoggia in un secondo punto A a C_p^n, di questi $\varphi_1(n, r)_p$ spazi, alcuni passano per A, e precisamente tanti, quanti sono gli S_{r-1} che segano in $2r$ punti una C_p^{n-1} di S_{r+1}; questo numero è $\varphi(n-1, r-1)_p$. Quindi la differenza

$$\varphi_1(n, r)_p - \varphi(n-1, r-1)_p$$

dà il numero degli S_r che segano $2r+1$ volte una C_p^n di S_{r+2}, e si appoggiano ad una corda della curva, senza contenere una estremità della corda. Sicchè

$$\varphi(n, r)_p + \varphi_1(n, r)_p - \varphi(n-1, r-1)_p = \varphi(n+1, r)_p - \varphi(n-1, r-1)_p$$

$$= \varphi(n+1, r)_{p+1}$$

dà il numero degli spazi S_r che segano in $2r+2$ punti una C_{p+1}^{n+1} (degenere); anche per la C_{p+1}^{n+1} vale adunque la (2).

Ma la (2) vale per $r = 0, 1$, e per le curve razionali di qualunque spazio (come si può mostrare direttamente); quindi per ragioni analoghe a quelle del § 1, la (2) vale per ogni curva (*).

(*) Si noti il caso particolare $\varphi(3\pi - 1, \pi - 2)_{2\pi} = \frac{1}{2\pi + 1}\binom{2\pi+1}{\pi}$. $= f(4\pi - 3, \pi - 2)_{2\pi}$, come deve essere per il teorema di **Riemann-Roch.**

3. *Il numero degli spazi S_{s-1} che hanno s contatti semplici con una C_p^n di S_s è*

$$(3) \quad 2^s\left[\binom{n-s}{s} + \binom{n-s-1}{s-1}p + \binom{n-s-2}{s-2}\binom{p}{2} + \ldots\right].$$

Indicando con $\psi(n, s)_p$ questa somma, si hanno le relazioni

$$\gamma) \left\{ \begin{array}{l} \psi(n+1, s)_p \;\;\, = \psi(n, s)_p + 2\psi(n-1, s-1)_p, \\ \psi(n+1, s)_{p+1} = \psi(n, s)_p + 4\psi(n-1, s-1)_p. \end{array} \right.$$

Ora si noti che la sviluppabile delle tangenti a C_p^{n+1}, quando questa curva degenera in una C_p^n e una retta g unisecante in A, si scinde nella sviluppabile delle tangenti a C_p^n e nel fascio di rette determinato dalla retta g e dalla tangente in A, contato due volte. Si noti inoltre che uno spazio S_{s-1} passante per una corda c di C_p^n, non deve considerarsi come bitangente alla C_{p+1}^{n+1} (costituita da C_p^n e da c) in punti di c, perchè S_{s-1} incontra C_{p+1}^{n+1} in $n-2$ punti oltre che in c. In base a queste osservazioni si riconosce subito che se la (3) vale per C_p^n, i numeri richiesti per C_p^{n+1} e C_{p+1}^{n+1} sono rispettivamente

$$\psi(n, s)_p + 2\,\psi(n-1, s-1)_p = \psi(n+1, s)_p$$

$$\psi(n, s)_p + 4\,\psi(n-1, s-1)_p = \psi(n+1, s)_{p+1}.$$

Ora la (3) vale per $s = 2$, e per le curve razionali di S_s; quindi ecc. (*).

4. La via seguita nei paragrafi precedenti può applicarsi con poche modificazioni alle rigate.

(*) La formula (3) dà il numero dei gruppi di una involuzione razionale d'ordine n a s dimensioni, che hanno s punti doppi. Per $p = 0$ il numero è dato dal Weyr (*Sitzb. Wien*, 1879); per $n = 2p - 2$, $s = p - 1$ dal Clebsch col mezzo degli integrali Abeliani, *Vorlesungen über Geometrie*, pag. 847.

Il numero degli S_{s-1} che contengono s raggi di una rigata Γ_p^n di S_s, è

$$(4)\ \binom{n-s+1}{s} - p\binom{n-s-1}{s-2} + \binom{p}{2}\binom{n-s-3}{s-4} - \dots$$

Indichiamo con $F(n, s)_p$ il valore della somma; paragonandola alla (1) si vede che

$$F(n, s)_p = f(n, s-2)_p;$$

le α) danno subito le relazioni, alle quali sodisfa la F.

Sia Γ_p^n una rigata di ordine n e genere p di S_s, per la quale valga la (4); e la (4) valga pure per ogni rigata degli spazi inferiori a S_s.

Se alla Γ_p^n aggiungiamo un fascio di raggi che abbia un elemento comune con Γ_p^n, otteniamo una Γ_p^{n+1} degenere. Uno spazio S_{s-1} che contenga s raggi di Γ_p^{n+1}, o contiene s raggi di Γ_p^n, oppure $s-1$ raggi di Γ_p^n e un raggio del fascio. Il numero dei primi S_{s-1} è $F(n, s)_p$, il numero dei secondi S_{s-1} è $F(n-1, s-1)_p$; quindi il numero totale degli S_{s-1} contenenti s raggi di Γ_p^{n+1} è

$$F(n, s)_p + F(n-1, s-1)_p = F(n+1, s)_p.$$

Se poi a Γ_p^n si aggiungono due fasci di raggi di centri V, V' aventi ciascuno un elemento comune colla rigata, e di più il raggio VV' comune, si ottiene una Γ_{p+1}^{n+2}; e il numero degli S_{s-1} contenenti s raggi di questa è

$$F(n, s)_p + 2\,F(n-1, s-1)_p = F(n+2, s)_{p+1}.$$

Ma si può dimostrare direttamente che la (4) vale per $s=3$, e qualunque sia s, per le rigate razionali ed ellittiche, quindi, ecc.

5. Due involuzioni razionali $g_m^{(q)}$, $g_n^{(r)}$ di ordini m, n e di molteplicità risp. q, r, giacenti sopra una curva di genere p, hanno in generale un numero finito di gruppi di $q+r$ punti G_{q+r} comuni (m, $n \geqq q+r$); quale è questo numero?

Il numero dei gruppi G_{q+r} comuni a due involuzioni razionali $g_m^{(q)}$,

$g_n^{(r)}$ *giacenti sopra una curva di genere p, è*

$$(5) \qquad \sum_{0}^{i} (-1)^i \binom{m-q-i}{r-i} \binom{n-r-i}{q-i} \binom{p}{i}.$$

Indichiamo con $[m_q, n_r]_p$ questa somma; si avrà l'uguaglianza

$$\delta) \qquad [m_q, n_r]_{p+1} = [m_q, n_r]_p - [(m-2)_{q-1}, (n-2)_{r-1}]_p.$$

La (5) valga per ogni curva il cui genere non superi p; dimostreremo che vale per $p+1$.

Osserviamo che ogni involuzione $g_\nu^{(\rho)}$ può ottenersi sopra una curva C_p^{p+s} di S_s mediante gli ∞^ρ spazi passanti per un $S_{s-\rho-1}$ secante in $p+s-\nu$ punti la curva; ciò quando s supera un certo limite. Anzi per s abbastanza grande, dei $p+s-\nu$ punti alcuni sono arbitrari. Ciò posto si abbia in S_s una C_{p+1}^{p+s+1} composta di una C_p^{p+s} e di una sua corda c. Le due serie $g_m^{(q)}$, $g_n^{(r)}$ siano segate su C_{p+1}^{p+s+1} dagli S_{s-1} che passano risp. per due spazi S_{s-q-1}, S_{s-r-1}, i quali incontrino in $p+s-m$, $p+s-n$ punti la C_p^{p+s} e in un punto ciascuno la c; questi due punti di c siano M, N. Se la C_{p+1}^{p+s+1} da redutibile, con una variazione infinitesima diventa irreduttibile, la parte di curva proveniente da c sarà segata da ogni spazio S_{s-1} passante per MN in un punto solo oltre ad M ed N, perchè questo S_{s-1} incontra già C_p^{p+s} in $p+s$ punti. Segue da ciò che di un gruppo G_{q+r} comune alle due involuzioni, mai due punti possono appartenere à c; e quindi in generale i gruppi G_{q+r} comuni giacciono tutti su C_p^{p+s}, ma non hanno elementi nelle estremità della corda c. Ora gli S_{s-1} passanti per S_{s-q-1}, S_{s-r-1} segano su C_p^{p+s} due $g_m^{(q)}$, $g_n^{(r)}$ le quali hanno $[m_q, n_r]_p$ G'_{q+r} comuni; ma di questi alcuni contengono le estremità della corda c, e solo i rimanenti danno i G_{q+r} richiesti. I primi G'_{q+r} sono tanti, quanti sono i G'_{q+r-2} comuni alle due involuzioni $g'^{(q-1)}_{m-2}$, $g'^{(r-1)}_{n-2}$ generate dagli S_{s-1} passanti per c e risp. per S_{s-q-1}, S_{s-r-1}; il loro numero è quindi

$$[(m-2)_{q-1}, (n-2)_{r-1}]_p;$$

e per conseguenza il numero richiesto dei G_{q+r} su C_{p+1}^{p+s+1} è

$$[m_q, n_r]_p - [(m-2)_{q-1}, (n-2)_{r-1}]_p = [m_q, n_r]_{p+1}.$$

Ma la formola (5) è esatta per $p = 0$; quindi è vera in generale (*).

6. Come deve modificarsi la (5) quando le due involuzioni hanno una involuzione minore comune?

Sia $m \gtreqless n$ e la involuzione $g_m^{(q)}$, contenga una $g_m^{(1)}$, i cui gruppi appartengano a gruppi di $g_n^{(r)}$; vogliamo determinare quanti sono i gruppi G_{q+r} i quali, senza giacere nella $g_m^{(1)}$, sono contenuti in $g_m^{(q)}$, $g_n^{(r)}$.

La $g_m^{(q)}$ sia segata su C_p^{p+s} di S_s dagli S_{s-1} passanti per un S_{s-q-1}, che si appoggia in $p + s - m$ punti a C_p^{p+s}. Di questi $p + s - m$ punti si fissino $p + s - n$, e si conduca per essi uno spazio $S_{s-(q+r)-1}$, facendo per ora la ipotesi che sia $p + s - n \leq s - (q + r)$, ossia

$$\varepsilon) \qquad n - p \geqq q + r.$$

Proiettiamo da $S_{s-(q+r)-1}$ la curva C_p^{p+s} in un S_{q+r}; otterremo in questo una curva C_p^n, sulla quale la $g_m^{(q)}$ sarà segata da spazi S_{q+r-1} passanti per un S_{r-1} avente $n - m$ punti comuni colla curva.

Fissato poi ad arbitrio un S_{q-1} non secante la curva, gli S_{q+r-1} passanti per esso determineranno sulla curva una $g_n^{(r)}$.

Dei $[m_q, n_r]_p$ gruppi G_{q+r} comuni a $g_m^{(q)}$, $g_n^{(r)}$ alcuni si trovano nello spazio S_{q+r-1} che contiene S_{q-1}, S_{r-1}; i rimanenti

$$\alpha = [m_q, n_r]_p - \binom{m}{q+r}$$

giacciono in spazi S_{q+r-2}, che segano S_{q-1}, S_{r-1} rispettivamente in S_{q-2}, S_{r-2}.

Ora i due spazi S_{q-1}, S_{r-1}, fin qui indipendenti, si seghino in un punto S_0; per il principio della conservazione del numero, degli α

(*) Vedi la dimostrazione della (5) per le curve razionali in una nota di Le Paige (*Bulletins de l'Acad. Roy. de Belgique*, 3ème série, tome XI). Per $q = 1$, p qualunque la formola può dimostrarsi mediante considerazioni più semplici, come mostreremo altrove.

spazi S_{q+r-2} alcuni α_1 verranno a passare per S_0, mentre gli altri β_1 segheranno in un S_{q+r-3} lo spazio S'_{q+r-2} che contiene S_{q-1}, S_{r-1}; e sarà

$$\alpha = \alpha_1 + \beta_1.$$

Ma β_1 è il numero dei gruppi G'_{q+r} che stanno in spazi S_{q+r-2}, e sono contenuti nella involuzione $g_m^{(1)}$ determinata dagli S_{q+r-1} passanti per S'_{q+r-2}; β_1 è quindi il numero dei gruppi G'_{q+r} comuni alla $g_m^{(1)}$ e alla $g_n^{(q+r-1)}$ segata dagli spazi che passano per un punto V (arbitrario) di S_{q+r}, esclusi quei gruppi di $q+r$ punti che si trovano nella proiezione di S'_{q+r-2} da V;

$$\beta_1 = [m_1,\ n_{q+r-1}]_p - \binom{m}{q+r}.$$

Per conseguenza

$$\alpha_1 = [m_q,\ n_r]_p - [m_1,\ n_{q+r-1}]_p.$$

Proiettando da S_0 la curva C_p^n e gli spazi S_{q-1}, S_{r-1} in uno spazio a $q+r-1$ dimensioni, si riconosce subito che α_1 è il numero dei gruppi G_{q+r} comuni a due $g_m^{(q)}$, $g_n^{(r)}$ aventi una $g_m^{(1)}$ comune.

Operando poi sulla curva proiezione come si è operato su C_p^n, ed approfittando del numero α_1, si trova che se $g_m^{(q)}$, $g_n^{(r)}$ hanno una $g_m^{(2)}$ comune, il numero dei G_{q+r} comuni si riduce a

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \beta_2,\ \text{dove}\ \beta_2 = [m_2,\ n_{q+r-2}]_p - [m_1,\ n_{q+r-1}]_p,$$

ossia a

$$\alpha_2 = [m_q,\ n_r]_p - [m_2,\ n_{q+r-2}]_p.$$

In generale si ha il teorema:

Se due involuzioni $g_m^{(q)}$, $g_n^{(r)}$ su C_p hanno una $g_m^{(\mu)}$ comune, il numero dei gruppi G_{q+r} che giacciono nelle due prime involuzioni, senza appartenere a $g_m^{(\mu)}$, è

$$(6) \qquad [m_q,\ n_r]_p - [m_\mu,\ n_{q+r-\mu}]_p.$$

Il caso in cui l'ipotesi ε) non si verifica, non esige una nuova trattazione. Infatti si fissino sulla curva k punti ad arbitrio, dove k è un numero abbastanza grande perchè la ε) sia vera quando al posto di n si scriva $n + k$. Allora la (6) sarà applicabile alla $g_m^{(q)}$ e alla $g_{n+k}^{(r)}$, i cui gruppi si ottengono aggiungendo quei k punti fissi ai gruppi di $g_n^{(r)}$. Dal nuovo valore che assume la (6) si tolga il numero di quei G_{q+r} comuni a $g_m^{(q)}$, $g_{n+k}^{(r)}$, i quali contengono uno o più dei punti k. Si otterrà una differenza che non varia al variare di k, e che perciò deve coincidere colla (6) del caso precedente. Dunque la (6) vale anche se la ε) non si verifica.

Applichiamo la (6) a determinare il numero degli spazi S_r che segano in $(2r + 2)$ punti una C_p^n di S_{r+2}; problema già risolto dalla (2).

Fissati in S_{r+2} due punti arbitrari S_0, S'_0, gli S_{r+1} passanti per l'uno o per l'altro di questi punti secano sulla curva due $g_n^{(r+1)}$ aventi una $g_n^{(r)}$ comune. Il numero richiesto è il numero dei $G_{2(r+1)}$ che giacciono nelle due $g_n^{(r+1)}$, senza appartenere alla $g_n^{(r)}$, ossia per la (6) è

$$[n_{r+1}, n_{r+1}]_p - [n_r, n_{r+2}]_p .$$

Ora, fatta qualche riduzione, si riconosce che questo numero coincide con quello dato dalla (2).

Torino, dicembre 1888.

G. CASTELNUOVO.

SULLE FUNZIONI ANALITICHE.

Nota di **G. Vivanti**, a Mantova.

Adunanza del 13 gennajo 1889.

La difficoltà di concepire funzioni aventi per ogni valore della variabile infiniti valori e partecipanti tuttavia delle proprietà fondamentali delle funzioni ordinarie, la quale fu causa che le funzioni di tale natura rimanessero per lungo tempo escluse dal campo dell'analisi, può dirsi cessata dacchè il concetto delle superficie di Riemann è entrato nel dominio comune. Infatti, imaginando costruita la riemanniana d'una funzione analitica qualsiasi, riesce chiaro come i varii valori di questa corrispondenti ad uno stesso valore della variabile si distribuiscano in *rami* affatto distinti, e come questi rami si continuino l'uno nell'altro in modo determinato. Ma le superficie di Riemann ad infiniti fogli e con infiniti punti di diramazione o con punti di diramazione d'ordine infinito possono forse dar luogo a qualche difficoltà; epperò sembra interessante vedere come possa studiarsi in tutta la sua estensione una funzione analitica affatto generale coll'unico sussidio di superficie aventi un numero finito di fogli e di punti di diramazione. A tale idea s'ispirano gli studi di Casorati, che citerò più avanti, sull'inversione degli integrali abeliani.

In una Nota inserita nel tomo II di questi *Rendiconti* ho ricordato il teorema seguente stabilito da Poincaré: Se y è una funzione analitica di x, esiste una variabile z di cui x ed y sono funzioni uniformi.

Sia x una funzione uniforme di z, e intorno a ciascun punto sin-

golare essenziale α di essa si descriva un cerchio di raggio finito ρ_α. Le quantità ρ_α potranno prendersi sempre in modo che vi sia un campo connesso A esterno a tutti i cerchi, entro il quale la x si comporti come una funzione meromorfa; e facendo decrescere insieme tutte le ρ_α si otterranno sempre nuovi campi A di cui ciascuno conterrà il precedente. In modo del tutto analogo potranno definirsi certi campi B relativi ad un'altra funzione uniforme y di z. Se si possono impicciolire abbastanza i raggi ρ perchè due campi A, B abbiano una porzione comune C, la y potrà riguardarsi come una funzione analitica di x per tutti i valori che x prende entro C (*), e allo studio di tale funzione potrà sostituirsi quella delle due funzioni uniformi x, y di z entro il campo C.

Imaginiamo ora un determinato campo C, che diremo C_1, diviso in un modo qualunque in un numero finito n_1 di parti $S_1, \ldots, S_{n_1}$; il modo di divisione potrà essere suggerito, in ciascun caso particolare, dalla natura della funzione che si considera. Nel campo S_i ciascuna delle x, y prende un medesimo valore un numero finito (o nullo) di volte, e le $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ s'annullano un numero finito (o nullo) di volte. Se quindi si rappresenta mediante una superficie a più fogli P_i (o Q_i) l'insieme dei valori presi da x (o da y) entro il campo S_i, la P_i (o la Q_i) avrà un numero finito di fogli e un numero pure finito di punti di diramazione (**). Ora le P_i, S_i si corrispondono punto a punto, e così le Q_i, S_i; quindi lo stesso potrà dirsi delle P_i, Q_i. Se ora prendiamo un altro campo C contenente C_1, e che diremo C_k, e se dividiamo la porzione di C_2 esterna a C_1 in un numero finito $n_2 - n_1$ di

---

(*) Può aggiungersi che, se qualcuno dei punti singolari essenziali della funzione x di z non è tale anche per la funzione y di z, y è certamente una funzione di x ad infiniti valori. Infatti, se α è un punto singolare essenziale di x, vi sarà necessariamente qualche valore c che la x prenderà nell'intorno di α un numero infinito di volte; ora, se y avesse per ciascun valore di x un numero finito di valori, qualcuno dei valori di y corrispondenti ad $x = c$ dovrebbe ripetersi un numero infinito di volte nell'intorno di α, che quindi sarebbe di necessità un punto singolare essenziale anche per la funzione y di z.

(**) I punti di diramazione della P_i (o della Q_i) corrispondono ai punti di S_i in cui $\frac{dx}{dz}$ $\left(\text{o} \frac{dy}{dz}\right)$ si annulla.

parti $S_{n_1+1}, \ldots, S_{n_2}$, otterremo per ciascuna S_i due superficie P_i, Q_i corrispondenti ad essa, e quindi anche tra loro, punto a punto. Così dunque la dipendenza fra x ed y è raffigurata da due serie di superficie P_1, $P_2, \ldots$; Q_1, $Q_2, \ldots$, aventi ciascuna un numero finito di fogli ed un numero finito di punti di diramazione, e le superficie aventi egual indice si corrispondono punto a punto.

Naturalmente tutto ciò *può concepirsi* affatto in generale, ma *non si sa effettuare* sinora che nei casi più semplici.

Citerò come primo esempio l'inversione degl'integrali abeliani dovuta a Casorati (*). In questo caso si può evitare l'introduzione della variabile ausiliaria z. Se $y = \int^x \varphi(x)\,dx$, dove $\varphi(x)$ è funzione algebrica, la riemanniana di quest'ultima funzione (*superficie monodromica*) può essere presa come una qualunque delle P_i, e la superficie a più fogli (*luogo fondamentale*) che rappresenta i valori presi da y sulla P_i come la corrispondente Q_i. Le P_i sono tutte identiche fra loro; le Q_i hanno tutte la stessa forma, e si ottengono l'una dall'altra mediante semplici traslazioni. Per esempio, se y è un'integrale ellittico di 1ª specie, le Q_i sono superficie ad un solo foglio e costituiscono una rete di parallelogrammi congruenti ricoprente per intero ed una volta sola il piano complesso (**).

In uno scritto recente (***) io ho fatto vedere con un esempio come si possa in qualche caso applicare il metodo di Casorati allo studio dell'integrale d'un'equazione algebrico-differenziale non lineare del 1° ordine.

Infine rammenterò come Poincaré (****) abbia espresso gl'integrali y di qualunque equazione algebrico-differenziale lineare e la variabile

(*) *Les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales abéliennes etc.* (Acta Mathematica, t. VIII).

(**) Volendo ricorrere alla variabile ausiliaria z, si può (Poincaré, *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, Acta Math., t. I, p. 258) porre x sotto forma d'una funzione fuchsiana opportunamente scelta di z; allora y è una funzione uniforme della stessa variabile.

(***) *Sulle funzioni definite da un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine* (Annali di Matematica, t. XVI)

(****) Acta Mathematica, t. I, IV, V.

indipendente x mediante funzioni uniformi d'una nuova variabile z. Supponiamo, per fissar le idee, che il gruppo fuchsiano dell'equazione considerata appartenga alla prima *famiglia*; allora, imaginando il cerchio di raggio 1 col centro nell'origine diviso nel modo noto in infiniti poligoni curvilinei, si potrà prendere come campo A, B o C l'insieme di tutti i poligoni i cui vertici distano dall'origine meno d'una quantità r minore di 1, e le porzioni S_i saranno appunto questi poligoni. In ciascuno di essi la funzione fuchsiana x prende ogni valore un numero finito di volte e la sua derivata si annulla pure un numero finito di volte; e lo stesso può dirsi della funzione zetafuchsiana y. Le P_i sono tutte identiche, perchè la funzione x riprende gli stessi valori in ciascun poligono; non così in generale le Q_i.

Mantova, 9 gennaio 1889.

G. VIVANTI.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS INVOLUTIVES DES COURBES ALGÉBRIQUES;

Note de M. G. **Fouret**, à Paris.

Adunanza del 24 febbrajo 1889.

Nous allons démontrer d'une manière fort simple, dans cette Note, un théorème très général relatif à l'intersection de deux courbes algébriques, et nous montrerons ensuite comment on en conclut presque immédiatement quelques autres théorèmes intéressants, déja obtenus, indépendamment les uns des autres, par différents auteurs.

THÉORÈME I. — *Étant données, dans un plan, deux droites et deux courbes algébriques de degrés quelconques, le produit des distances des points d'intersection des deux courbes à l'une des droites reste dans un rapport constant avec le produit des distances des mêmes points à l'autre, lorsque les deux courbes varient, sans cesser de couper les deux droites aux mêmes points.*

Prenons les deux droites considérées OX et OY (*) pour axes de coordonnées, et écrivons sous forme homogène

$$(1)\left\{\begin{array}{ll} (C) & f(x, y, z) + \varphi(x, z) + \psi(y, z) + \lambda z^{n} = 0, \\ (C_1) & f_1(x, y, z) + \varphi_1(x, z) + \psi_1(y, z) + \lambda z^{n_1} = 0, \end{array}\right.$$

(*) Le lecteur est prié de faire lui-même la figure.

les équations des deux courbes (C) et (C_1), respectivement de degrés n et n_1, rapportées à ce système d'axes, en représentant par f et f_1 les groupes de termes qui renferment à la fois x et y, par φ et φ_1 les groupes de termes qui contiennent x, sans contenir y, par ψ et ψ_1 les groupes de termes qui contiennent y sans contenir x, par λ et λ_1 des coefficients numériques. On voit immédiatement que, lorsque les deux courbes varieront, en coupant toujours OX et OY aux mêmes points, les seuls termes qui pourront changer, dans les deux équations, seront ceux de f et de f_1.

L'équation du système des nn_1 droites, telles que OM, qui joignent le point O aux points de rencontre des deux courbes, s'obtiendrait en éliminant z entre les équations (1). Nous pouvons supposer cette équation résultante mise sous la forme

$$ax^{nn_1} + by^{nn_1} + g(x, y) = 0, \tag{2}$$

en désignant par $g(x, y)$ un polynôme homogène de degré nn_1, dont tous les termes contiennent à la fois x et y. On en conclut pour le produit des coefficients angulaires des droites telles que OM

$$\Pi\left[\frac{\sin \widehat{MOX}}{\sin \widehat{MOY}}\right] = (-1)^{nn_1}\frac{a}{b}. \tag{3}$$

Or il est aisé de voir que a et b restent constants, lorsque les courbes (C) et (C_1) varient, en continuant de couper OX et OY aux mêmes points. En effet, ax^{nn_1} est le résultant provenant de l'élimination de z entre les équations (1), dans lesquelles on a préalablement annulé y. Mais alors ces deux équations se réduisent respectivement à

$$\begin{aligned}\varphi(x, z) + \lambda z^n &= 0,\\ \varphi_1(x, z) + \lambda_1 z^{n_1} &= 0;\end{aligned}$$

et l'on voit qu'elles ne changent pas, lorsque les deux courbes varient, en satisfaisant aux conditions qui leur sont imposées. On en conclut que a reste invariable. Un raisonnement identique prouve qu'il en est de même de b, et on déduit de la relation (3)

$$\Pi\left[\frac{\sin \widehat{MOX}}{\sin \widehat{MOY}}\right] = \text{const.} \tag{4}$$

D'ailleurs, MP et MQ étant les distances du point M à OX et à OY, on a

$$\sin \widehat{MOX} = \frac{MP}{OM}, \quad \sin \widehat{MOY} = \frac{MQ}{OM};$$

d'où

$$\frac{\sin \widehat{MOX}}{\sin \widehat{MOY}} = \frac{MP}{MQ},$$

et par suite

$$(5) \qquad \Pi \left[\frac{MP}{MQ} \right] = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

Remarques. — 1° La démonstration précédente suppose que les deux droites OX et OY se coupent ; mais il est clair que le théorème ayant lieu, quelqu'éloigné que soit le point O, subsiste encore, à la limite, lorsque les deux droites sont parallèles.

2° On reste évidemment dans les conditions de l'énoncé du théorème I, lorsqu'on remplace la courbe (C) par n droites joignant respectivement les points où elle coupe OX aux points où elle coupe OY, les points des deux séries étant d'ailleurs associés par couples d'une manière quelconque. On peut faire de même pour la courbe (C_1), et on obtient ainsi une suite de produits, tels que (4) ou (5), qui sont tous égaux, en vertu du théorème I. Ces égalités constituent des relations *d'involution*, dans le sens le plus général attribué à cette expression par Poncelet. Pour rendre ces relations projectives, il suffirait d'ailleurs de transformer, à l'aide d'un artifice souvent employé par Chasles, les rapports qui y figurent en rapports anharmoniques, au moyen de la division des deux membres par $\left[\frac{\sin \widehat{UOX}}{\sin \widehat{UOY}} \right]^{mn_1}$, OU étant une droite de direction arbitraire.

3° Dans le cas où l'une des courbes se reduit à une conique, et l'autre à une droite, on retrouve, sons une forme un peu différente, le théorème de Desargues sur l'involution.

En vertu du principe de continuité, le théorème I subsiste, lors-

que les droites OX et OY, au lieu d'être réelles, sont imaginaires conjuguées. Supposons, en particulier, que ce soient les deux droites isotropes issues d'un même point réel O. On a, comme on sait,

$$\frac{\sin \widehat{MOX}}{\sin \widehat{MOY}} : \frac{\sin \widehat{UOX}}{\sin \widehat{UOY}} = e^{2i\,\widehat{MOU}},$$

et en considérant, avec Laguerre, comme ayant même *orientation*, deux systèmes composés d'un même nombre de droites, qui sont tels que la somme des angles avec un même axe, d'ailleurs quelconque, des droites de l'un des systèmes, soit égale, à un multiple de π près, à la somme des angles avec le même axe des droites de l'autre système, on déduit immédiatement du théorème I le suivant :

THÉORÈME II. — *Le faisceau composé des droites qui joignent un point fixe aux points d'intersection de deux courbes algébriques, conserve une même orientation, lorsque les deux courbes varient, en rencontrant toujours aux mêmes points les droites isotropes issues du point fixe.*

M. Humbert a obtenu cette proposition par une voie toute différente, dans un Mémoire *Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques* (*).

Revenons au théorème I, et désignons par M' l'un quelconque des points d'intersection des deux courbes (C) et (C_1), après une variation de ces courbes qui ne change pas leurs points d'intersection avec les droites OX et OY. On a, d'après le théorème I,

$$\Pi\left[\frac{MP}{MQ}\right] = \Pi\left[\frac{M'P'}{M'Q'}\right],$$

$M'P'$ et $M'Q'$ étant les distances du point M' à OX et à OY.

L'égalité précédente peut s'écrire

$$\Pi\left[\frac{MP}{M'P'}\right] = \Pi\left[\frac{MQ}{M'Q'}\right].$$

(*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4ème série, t. III, p. 356.

Imaginons maintenant que OY s' éloigne à l' infini. Le rapport $\frac{MQ}{M'Q'}$ et les rapports analogues tendent vers l'unité; de sorte que l'égalité précédente devient à la limite

$$\Pi[MP] = \Pi[M'P'].$$

On conclut de là le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Le produit des distances des points d' intersection de deux courbes algébriques à une droite fixe reste constant, lorsque les deux courbes varient, en conservant respectivement les mêmes directions asymptotiques et les mêmes points de rencontre avec la droite fixe.*

Ce théorème se trouve démontré dans le Mémoire dejà rappelé de M. Humbert (*). Mais il avait été donné antérieurement par Liouville (**)

Nous pouvons profiter de ce que la relation (4), constituant le théorème I, peut s'écrirè sous la forme

$$\Pi\left[\frac{\sin\widehat{MOX}}{\sin\widehat{MOY}} : \frac{\sin\widehat{UOX}}{\sin\widehat{UOY}}\right] = \text{const.},$$

ne contenant que des rapports anharmoniques, pour faire une transformation par polaires réciproques. On obtient alors aisément la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *Étant donnés, dans un plan, deux points fixes et deux courbes algébriques de classes quelconques, le produit des distances de l'un des deux points aux tangentes communes des deux courbes reste dans un rapport constant avec le produit des distances de l'autre point à ces mêmes droites, lorsque les deux courbes varient, en conservant les mêmes tangentes issues des deux points fixes.*

Transformons par polaires réciproques la figure à laquelle se rapporte le théorème II, en prenant pour conique directrice de la trans-

(*) *Loc. cit.* p. 364.

(**) Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1ère série t. VI, p. 378 (année 1841).

formation un cercle ayant son centre en O. On en conclut immédiatement l'énoncé suivant :

Théorème V. — *Le système des tangentes communes à deux courbes algébriques conserve la même orientation, lorsque les deux courbes varient, en conservant respectivement les mêmes foyers.*

Cette orientation est celle du système des droites obtenues, en joignant chacun des foyers de l'une des courbes à tous les foyers de l'autre.

Ce théorème est dû à Laguerre, qui l'a donné sans démonstration dans le Bulletin de la Société Philomatique de 1870 (page 140).

Rappelons que, dans le cas particulier où l'une des courbes se réduit à un point, on déduit du théorème précédent cet autre théorème remarquable également, énoncé par Laguerre en 1865 (*), à savoir :

Théorème VI. — *Le faisceau des tangentes menées d'un point quelconque à une courbe algébrique a même orientation que le faisceau des droites joignant ce point aux foyers réels de la courbe.*

On obtiendrait de même une conséquence intéressante du théorème IV, en supposant que l'une des deux courbes, auxquelles il se rapporte, se réduit à un point. On pourrait aussi supposer dans les théorèmes I, II et III, que l'une des courbes se réduit à une droite. Nous n'énoncerons pas les propositions auxquelles on est ainsi conduit.

Appliquons, pour terminer, le théorème I au cas où l'une des courbes, (C_1) par exemple, est une conique tangente aux droites OX et OY, la seconde courbe (C) restant quelconque. La polaire du point O par rapport à la conique (C_1) constitue une conique infiniment aplatie, qui coupe OX et OY aux mêmes points que la première. En désignant par N l'un des points d'intersection de la courbe (C) avec la polaire de O par rapport à la conique (C_1), point qui doit être compté deux fois, et appliquant le théorème I, on obtient la relation (**)

$$\Pi_{2n}\left[\frac{\sin \widehat{MOX}}{\sin \widehat{MOY}}\right] = \Pi_n\left[\frac{\sin \widehat{NOX}}{\sin \widehat{NOY}}\right]^2.$$

(*) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. LX, p. 70-73.

(**) Les indices, dont sont affectées ici les lettres Π, marquent le nombre de facteurs qui composent chaque produit.

Supposons maintenant que les droites OX et OY soient des droites isotropes conjuguées; on conclut de la relation précédente le théorème suivant :

Théorème VII. — *Le faisceau des droites, qui joignent un des foyers d'une conique aux points d'intersection de cette conique avec une courbe algébrique tracée dans son plan, a même orientation que le faisceau, compté comme double, des droites joignant le même foyer aux points de rencontre de la directrice correspondante avec la courbe.*

Ce théorème que j'avais communiqué verbalement à la Société Mathématique de France en 1874 (séance du 11 novembre), se trouve également dans le Mémoire déjà cité de M. Humbert (*). Il est la généralisation d'une propriété bien connue sur l'intersection d'une conique et d'une droite, et donne, comme cas particulier, le théorème suivant, qui reproduit, sous une forme un peu différente, un théorème dû à Laguerre :

Théorème VIII. — *Le faisceau des droites joignant le centre d'un cercle aux points d'intersection de ce cercle et d'une courbe algébrique, située dans son plan, a même orientation que le système, compté deux fois, des directions asymptotiques de la courbe.*

On pourrait pousser plus loin ces déductions; mais je pense avoir atteint le but principal de la présente Note, qui était d'établir, à l'aide des premiers éléments de l'algèbre, et sans calcul, une proposition très générale sur l'intersection de deux courbes algébriques, et d'y rattacher une série de théorèmes de diverses provenances.

Paris, 8 février 1889.

G. Fouret.

(*) *Loc. cit.* p. 357.

SU GLI ASINTOTI DELLE LINEE PIANE ALGEBRICHE.

Da una Lettera di **F. Casorati** a G. B. Guccia.

Adunanza del 24 febbraio 1889.

. . . .

Nei *Rendiconti* dell'Istituto Lombardo per il 1879, io presentava le equazioni degli asintoti sotto forma che dicevo *nuova e migliore delle forme conosciute*. Ma, capitatimi sott'occhi *The Mathematical Writings* di D. F. Gregory, pubblicati a Cambridge nel 1865, vidi che il ch. autore inglese aveva trovato e pubblicato già nel vol. IV del *Cambridge Mathematical Journal* le equazioni degli asintoti nella maniera e nella forma da me credute nuove. E però, Ella farebbemi cosa grata inserendo nei *Rendiconti* del Circolo questa restituzione, che sembrami doverosa comunque modico ne sia l'oggetto. E potrebbe aggiungervi il seguente cenno del come le stesse equazioni si deducano immediatamente dalle equazioni delle tangenti nel finito, ridotte in prima a forma opportuna; se mai questa riduzione non Le paresse già divulgata tra i nostri studenti, nè troppo ovvia.

Essendo $u(x, y) = 0$ l'equazione in coordinate cartesiane della linea, le usuali equazioni delle tangenti sono rispettivamente:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial u}{\partial y}(Y - y) = 0 \,,$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X - x)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(X - x)(Y - y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(Y - y)^2 = 0,$$

. . . .

secondochè il punto x, y di contatto sia semplice, o doppio, od ecc.

In queste equazioni i coefficienti dei termini di grado 0, 1, 2, ... in X, Y sono rispettivamente espressioni di grado n, $n-1$, $n-2$, ... in x, y, essendo n il grado di u; ma, in virtù delle proprietà delle funzioni omogenee e delle equazioni del punto, semplice, doppio, ecc., questi gradi in x, y si possono ridurre al minimo, cioè all'$n-1$ se il punto è semplice, all'$n-2$ se doppio, ecc. Questa preliminare riduzione agevola talune ricerche, compresa quella degli asintoti. La riduzione della (1) alla forma:

$$(1)' \qquad \frac{\partial u}{\partial x} X + \frac{\partial u}{\partial y} Y + u_{n-1} + 2u_{n-2} + \dots + n u_0 = 0,$$

dove u_r denota la somma dei termini di grado r della u, si vede già esposta in molti trattati ed anche applicata; ma non la riduzione analoga per i casi dei punti multipli.

Per ridurre la (2), applichiamo in prima le proprietà delle funzioni omogenee:

$$x \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial y} = (r-1) \frac{\partial u_r}{\partial x}, \quad x \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2} = (r-1) \frac{\partial u_r}{\partial y}$$

$$x^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2} = (r-1) r u_r.$$

Ne risulterà:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} X^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} XY + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} Y^2$$

$$-2X\left[(n-1)\frac{\partial u_n}{\partial x} + \dots + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right] - 2Y\left[(n-1)\frac{\partial u_n}{\partial y} + \dots + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right]$$

$$+ (n-1) n u_n + (n-2)(n-1) u_{n-1} + \dots + 1.2 u_2 = 0.$$

In questa equazione le x, y non entrano con gradi maggiori di $n-2$ fuorchè nelle espressioni:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial y}, \quad u_n, \quad u_{n-1}.$$

Ora, le equazioni del punto doppio

$$u = u_n + u_{n-1} + \dots + u_1 + u_0 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + \dots + \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0,$$

e la conseguente

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = n u_n + (n-1) u_{n-1} + \dots + u_1 = 0$$

somministrano quelle quattro espressioni in termini di altre i cui gradi non superano $n-2$. Per ciò la (2) si riduce infine alla:

$$(2)' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} X^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} XY + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} Y^2$$

$$+ 2X\left[\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + 2\frac{\partial u_{n-2}}{\partial x} + \dots + (n-1)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]$$

$$+ 2Y\left[\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + 2\frac{\partial u_{n-2}}{\partial y} + \dots + (n-1)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right]$$

$$+ 1.2\, u_{n-2} + 2.3\, u_{n-3} + \dots + (n-1)\, n u_0 = 0.$$

Superfluo considerare i casi del punto triplo, ecc.

Venendo ora alla particolare questione degli asintoti, per dedurne le equazioni dalla $(1)'$ nel caso del punto semplice, dalla $(2)'$ nel caso del doppio, ecc., basta porre λt, μt in luogo di x, y e dividere per la massima potenza di t, cioè per t^{n-1} la $(1)'$, per t^{n-2} la $(2)'$, ecc., e far poi crescere t all'infinito. Si avranno così le equazioni (*):

$$\frac{\partial u_n}{\partial \lambda} X + \frac{\partial u_n}{\partial \mu} Y + u_{n-1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} X^2 + 2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} XY + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} Y^2 + 2\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} X + 2\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} Y + 2u_{n-2} = 0,$$

. . . . ;

(*) che nella Nota del 1879 sono segnate (6), (7), ecc.

dove, ben s'intende, che λ e μ soddisfanno, nel caso del punto semplice, la:

$$u_n(\lambda, \mu) = 0,$$

nel caso del punto doppio, le:

$$u_n = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial \mu} = 0, \quad u_{n-1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

tali divenendo le equazioni del punto semplice, doppio, ... per t infinito.

Havvi però la differenza fra il caso del punto semplice e gli altri, che, nel primo, i coefficienti dell'equazione $u = 0$ possono rimanere invariati mentre s'imagina che il punto λt, μt vada su la linea all'infinito.

Terminerò osservando, che, in coordinate omogenee, le usuali equazioni delle tangenti

$$(1)'' \qquad \left(X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + Z\frac{\partial}{\partial z}\right)u(x, y, z) = 0,$$

$$(2)'' \qquad \left(X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + Z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u(x, y, z) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

hanno già rispetto alle x, y, z i gradi minimi dianzi ottenuti colla riduzione, cioè il grado $n - r$ nel caso del punto r-plo.

Queste equazioni divengono senz'altro quelle degli asintoti facendovi $z = 0$; e facendovi inoltre $Z = 1$, se vogliansi in coordinate cartesiane come prima (*). Esse mutansi precisamente nelle $(1)'$, $(2)'$, ..., se si ponga per $u(x, y, z)$ la somma $u_n + z u_{n-1} + \ldots + z^{n-1} u_1 + z^n u_0$ e si faccia $Z = 1$, $z = 1$.

Pavia, 7 febbrajo 1889.

F. Casorati.

(*) Le coordinate del punto all'infinito resterebbero significate da x, y in vece di λ, μ.

L'HESSIANO DELLA SESTICA BINARIA
E IL DISCRIMINANTE DELLA FORMA DELL'OTTAVO ORDINE.

Nota I[a] del prof. G. **Maisano**, in Messina.

Adunanza del 24 febbraio 1889.

È noto (*) che la forma binaria dell'ottavo ordine possiede nove invarianti indipendenti (nel senso di Gordan), i quali debbono sodisfare a tre relazioni, essendo cinque gl'invarianti assoluti della forma. Gl'invarianti dell'Hessiano della Sestica, forma particolare dell'ottavo ordine per la quale devono aver luogo due speciali condizioni, sodisferanno perciò a cinque relazioni, la cui ricerca forma lo scopo principale di questo scritto, il quale ha stretto legame colla mia Memoria *La Sestica binaria* (Atti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIX, 1884).

Il presente lavoro verrà diviso nelle seguenti Note:

I. Calcolo degl'invarianti dell'Hessiano in funzione degl' invarianti della Sestica.

II. Applicazione dei risultati precedenti al calcolo del discriminante della forma generale dell'ottavo ordine.

III. Relazioni fra gl'invarianti dell'Hessiano.

(*) Cfr. Von Gall: *Das vollständige Formensystem einer binären Form achter Ordnung* (Math. Annalen, Bd. XVII, S. 31) -- Sylvester, American Journal of Mathematics, Vol. II, pag. 223.

I. Invarianti dell'Hessiano della Sestica.

Indicando con

$$\varphi = \varphi_x^8 = (a\,b)^2\, a_x^4\, b_x^4 \tag{1}$$

l'Hessiano della Sestica $f = a_x^6 = b_x^6 = \ldots,$

$$g = g_x^8 = (\varphi\,\varphi')^4\, \varphi_x^4\, \varphi'^4_x = (\varphi,\ \varphi)^4 \tag{2}$$

e

$$k = k_x^4 = (\varphi\,\varphi')^6\, \varphi_x^2\, \varphi'^2_x = (\varphi,\ \varphi)^6 \tag{3}$$

la quarta e sesta sovrapposizione della forma φ sopra sè stessa, e con

$$h = h_x^4 = (k\,k')^2\, k_x^2\, k'^2_x = (k,\ k)^2 \tag{4}$$

l'Hessiano della forma biquadratica k, gl'invarianti fondamentali di φ sono i seguenti: (*)

$$J_2 = (\varphi,\ \varphi)^8,\ J_3 = (\varphi,\ g)^8,\ J_4 = (k,\ k)^4,\ J_5 = (\varphi\,k)^4 (\varphi\,k')^4,$$

$$J_6 = (g\,k)^4 (g\,k')^4,\ J_7 = (\varphi\,k)^4 (\varphi\,h)^4,\ J_8 = (g\,k)^4 (g\,h)^4,\ J_9 = (\varphi\,h)^4 (\varphi\,h')^4,$$

$$J_{10} = (g\,h)^4 (g\,h')^4. \tag{5}$$

Per calcolare questi nove invarianti in funzione degl'invarianti fondamentali di f ci serviremo delle seguenti formule, che possono trovarsi nella citata Memoria e nella Nota *Die Steiner'sche Covariante* (Math. Annalen Bd. XXXI, S. 493).

$$g = (\varphi,\varphi)^4 = \frac{2}{21} f.l + \frac{5^2}{2.\,3.\,7^2}\cdot i^2 - \frac{1}{15} A.\,\varphi. \tag{6}$$

$$k = (\varphi,\varphi)^6 = \frac{1}{42} A.i + \frac{10}{49}\Delta, \tag{7}$$

(*) Math. Annalen l. c. pag 149.

quale per la teoria delle forme biquadratiche seguono

$$, k)^2 = \left(\frac{2^2.5^2}{3.7^4} C + \frac{5}{3^2.7^3} A.B\right).i + \left(\frac{1}{2^2.3^2.7^2} A^2 - \frac{2.5^2}{3.7^4} B\right)\Delta, \quad (8)$$

$$(k, k)^4 = \frac{1}{2^2.3^2.7^2} A^2.B + \frac{2.5^2}{3.7^4} B^2 + \frac{2.5}{3.7^3} A.C. \quad (9)$$

$$(\varphi, \varphi)^8 = \frac{2}{15} A^2 - \frac{5}{7} B. \quad (10)$$

$$(f.l)_{y^4} = a_x^2 a_y^4.\ l_x^2 + (xy).\ (al)\ a_x^2 a_y^3 l_x +$$

$$+ \frac{3}{7}(xy)^2.\ \Delta_x^2 \Delta_y^2 + \frac{1}{14} A.\ (xy)^2.\ i_x^2 i_y^2. \quad (11)$$

$$(i^2)_{y^4} = i_x^4.\ i_y'^4 - \frac{12}{7}(xy)^2.\ \Delta_x^2 \Delta_y^2 - \frac{1}{5} B(xy)^4. \quad (12)$$

'alle due ultime segue

$$g_x^4 g_y^4 = \frac{2}{21} a_x^2 a_y^4.\ l_x^2 + \frac{2}{21}(xy).\ (al) a_x^2 a_y^3 l_x + \frac{5^2}{2.3.7^2} i_x^4.i_y'^4$$

$$\frac{2^2.3^2}{7^3}(xy)^2.\ \Delta_x^2 \Delta_y^2 + \frac{1}{3.7.^2} A.(xy)^2.\ i_x^2 i_y^2 - \frac{5}{2.3.7^2} B.(xy)^4$$

$$-\frac{1}{15} A.\ \varphi_x^4 \varphi_y^4. \quad (13)$$

$$(\varphi a)^6 (\varphi l)^2 = \frac{10}{7} C + \frac{5}{21} A.B. \quad (14)$$

$$(ai)^3 a_x^2 a_y i_x = -\frac{1}{4}(xy).\ l. \quad (15)$$

$$(a\Delta)^3 a_x^3 \Delta_x = -\frac{1}{2}(il) i_x^3 l_x, \quad (16)$$

quale seguono:

$$(a\Delta)^3 a_x^2 a_y \Delta_x = -\frac{1}{2}(il) i_x^3 l_y + \frac{1}{4}(xy).\ m, \quad (17)$$

$$(a\Delta)^4 a_x^2 = \frac{1}{2} m. \tag{18}$$

$$(i\varphi)^4 \varphi_x^4 = \frac{2}{7}\Delta + \frac{2}{15} A.\,i. \tag{19}$$

$$(\Delta\varphi)^4 \varphi_x^4 = \frac{1}{4} l^2 - \frac{5}{42} B.\,i - \frac{1}{30} A.\Delta. \tag{20}$$

$$(i\varphi)^4 (i'\varphi)^4 = \frac{2}{7} C + \frac{2}{15} A.\,B. \tag{21}$$

$$(i\varphi)^4 (\Delta\varphi)^4 = \frac{1}{21} B^2 + \frac{2}{15} A.\,C. \tag{22}$$

$$(\Delta\varphi)^4 (\Delta'\varphi)^4 = \frac{1}{4} D - \frac{2}{7} B.\,C - \frac{1}{30} A.\,B^2. \tag{23}$$

$$(l^2, i)^4 = \frac{2}{3} (B^2 + A.\,C). \tag{24}$$

$$(l^2, \Delta)^4 = D - \frac{1}{9} A.\,B^2 - \frac{2}{3} B.\,C. \tag{25}$$

$$(l.m,\ i)^4 = D. \tag{26}$$

$$(l.\,m,\ \Delta)^4 = \frac{1}{9} B^3 + \frac{2}{9} A.B.C + \frac{2}{3} C^2. \tag{27}$$

Le formule (10) e (9) danno gl'invarianti

$$J_2 = \frac{2}{15} A^2 - \frac{5}{7} B. \tag{I}$$

$$J_4 = \frac{1}{2^2.\,3^2.\,7^2} A^2.B + \frac{2.\,5^2}{3.\,7^4} B^2 + \frac{2.\,5}{3.\,7^3} A.C. \tag{II}$$

Calcolo di J_3 — Per la (6) si ha

$$(\varphi g)^8 = \frac{2}{21} (\varphi a)^6 (\varphi l)^2 + \frac{5^2}{2.\,3.\,7^2} (i\varphi)^4 (i'\varphi)^4 - \frac{1}{15} A.\,(\varphi,\varphi)^8,$$

e per le (10), (14), (21)

$$J_3 = (\varphi g)^8 = \frac{5.\,11}{7^3} C + \frac{2^2}{7^2} A.\,B - \frac{2}{3^2.\,5^2} A^3. \tag{III}$$

Calcolo di J_5 — Dalla (7) segue

$$(\varphi k)^4(\varphi k')^4 = \frac{1}{2^2 . 3^2 . 7^2} A^2 . (i\varphi)^4 (i'\varphi)^4 + \frac{10}{3 . 7^3} A . (i\varphi)^4 (\Delta\varphi)^4 + \frac{2^2 . 5^2}{7^4} (\Delta\varphi)^4 (\Delta'\varphi)^4,$$

la quale, per le (21), (22) e (23), diviene

$$J_5 = (\varphi k)^4 (\varphi k')^4 = \frac{5^2}{7^4} D - \frac{2^3 . 5^2}{7^5} B . C - \frac{2^2 . 5}{3^2 . 7^4} A . B^2 + \frac{1}{2 . 7^3} A^2 . C + \frac{1}{2 . 3^3 . 5 . 7^2} A^3 . B. \quad \text{(IV)}$$

Calcolo di J_6 — Dalle (15) e (17) seguono

$$(ai)^3 (al) a_x^2 i_x l_x = \frac{1}{4} l^2,$$

$$(a\Delta)^3 (al) a_x^2 \Delta_x l_x = \frac{1}{4} A_{ll} . i - \frac{1}{4} l . m,$$

le quali, sostituite nella seguente

$$(ak)^3 (al) a_x^2 k_x l_x = \frac{1}{42} A . (ai)^3 (al) a_x^2 i_x l_x + \frac{10}{49} (a\Delta)^3 (al) a_x^2 \Delta_x l_x,$$

danno

$$(ak)^3 (al) a_x^2 k_x l_x = \frac{1}{2^3 . 3 . 7} A . l^2 - \frac{5}{2 . 7^2} l . m + \frac{5}{7^2} C . i + \frac{5}{2 . 3 . 7^2} A . B . i. \quad (28)$$

Si ha inoltre per le (19), (20)

$$(\varphi k)^4 \varphi_x^4 = \frac{1}{3^2 . 5 . 7} A^2 . i - \frac{5^2}{3 . 7^3} B . i + \frac{5}{2 . 7^2} l^2 \quad (29)$$

e per la (13)

$$(gk)^4 g_x^4 = \frac{2}{21} (ak)^4 a_x^2 . l - \frac{2}{21} (ak)^3 (al) a_x^2 k_x l_x + \frac{5^2}{2 . 3 . 7^2} (ik)^4 . i'^4_x$$
$$- \frac{2^2 . 3^2}{7^3} (\Delta k)^2 \Delta_x^2 k_x^2 + \frac{1}{3 . 7^2} A . (ik)^2 i_x^2 k_x^2 - \frac{5}{2 . 3 . 7^2} B . k - \frac{1}{15} A . (\varphi k)^4 \varphi_x^4,$$

ovvero, facendo uso delle formole (18), (28) e (29) e applicando la teoria delle forme biquadratiche,

$$(gk)^4 g_x^4 = \frac{5}{7^3} l . m - \frac{1}{2^2 . 3 . 7^2} A . l^2 + \frac{5^2}{3 . 7^5} C . i + \frac{31}{3^2 . 7^4} A . B . i - \frac{1}{3^3 . 5^2 . 7} A^3 . i$$
$$+ \frac{5}{3 . 7^3} B . \Delta + \frac{1}{2 . 3^2 . 7^3} A^2 . \Delta, \quad (30)$$

dalla quale, per le (24), (25), (26) e (27), si ottiene

$$J_6=(g\,k)^4(g\,k')^4=\frac{2.\,5^2.\,103}{3\cdot 7^7}C^2+\frac{5^2.\,11}{7^7}B^3+\frac{2.\,5.\,127}{3^2.\,7^6}A.B.C+\frac{31}{2^2.3^2.7^5}A^2.B^2$$

$$-\frac{43}{2.\,3^3.\,5.\,7^4}A^3.\,C-\frac{1}{2.\,3^4.\,5^2.\,7^2}A^4.\,B. \qquad \text{(V)}$$

Importa osservare che J_6 è indipendente dall'invariante D.

Calcolo di J_7 — Per la (8) si ha

$$(\varphi h)^4\varphi_x^4=\left(\frac{2^2.5^2}{3\cdot 7^4}C+\frac{5}{3^2.7^3}A.B\right).(i\varphi)^4\varphi_x^4+\left(\frac{1}{2^2.3^2.7^2}A^2-\frac{2.5^2}{3.7^4}B\right).(\Delta\varphi)^4\varphi_x^4,$$

cioè, per le (19) e (20),

$$(\varphi h)^4\varphi_x^4=\frac{2^3.5^2}{3\cdot 7^5}C.\Delta+\frac{5}{3.7^4}A.B.\Delta-\frac{1}{2^3.3^3.5.7^2}A^3.\Delta+\frac{5^3}{3^2.7^5}B^2.i+\frac{2^3.5}{3^2.7^4}A.C.i$$

$$+\frac{11}{2^3.3^3.7^3}A^2.\,B.\,i-\frac{5^2}{2.3.7^4}B.\,l^2+\frac{1}{2^4.3^2.7^2}A^2.\,l^2, \qquad (31)$$

dalla quale segue per le (24), (25) e per la teoria delle forme biquadratiche :

$$J_7=(\varphi h)^4(\varphi k)^4=-\frac{5^3}{3.7^6}B.D+\frac{5}{2^3.3^2.7^4}A^2.D+\frac{2^5.5^3}{3^2.7^7}B^2.C+\frac{2^2.5^3}{3^2.7^6}A.C^2$$

$$+\frac{5^2}{3^3.7^5}A.\,B^3+\frac{2^2.5}{3^3.7^5}A.^2\,B.\,C+\frac{1}{2^2.3^4.5\,7^3}A^4.\,C+\frac{1}{2^3.3^3.7^4}A^3.\,B^2. \text{(V}$$

Calcolo di J_8 — Segue dalle (8), (13) e (31)

$$(gh)^4g_x^4=\frac{2.5^2}{3.7^5}C.l^2+\frac{5}{3^2.7^4}A.B.l^2-\frac{1}{2^4.3^3.5.7^2}A^3.l^2-\frac{5^2}{3.7^5}B.l.m+\frac{1}{2^3.3^2.7^3}A^2.l.\text{ı}$$

$$+\frac{5^2.29}{3^2.7^6}B.C.i+\frac{5.\,47}{3^3.7^6}A.B^2.i-\frac{443}{2^3.3^3.7^5}A^2.C.i-\frac{107}{2^3.3^4.5.7^4}A^3.B.i$$

$$-\frac{5^2}{3^2.7^7}B^2.\Delta-\frac{2^2.5}{7^6}A.C.\Delta-\frac{127}{2^3.3^3.7^5}A^2.B.\Delta+\frac{1}{2^3.3^4.5^2.7^2}A^4.\Delta, \text{(32}$$

dalla quale per le (24), (25), (26) e (27)

$$J_8 = (gb)^4 (gk)^4 = \frac{2^2.5^3}{3.7^7} C.D + \frac{5^2}{2.3.7^6} A.B.D - \frac{1}{2^4.3^3.7^4} A^3.D - \frac{5^3.11}{3.7^9} B^4$$
$$- \frac{2.5^3.13}{3^2.7^8} B.C^2 - \frac{5^2.73}{3^2.7^8} A.B^2.C - \frac{5.137}{2^2.3^3.7^7} A^2.C^2 - \frac{5}{2^3.3^2.7^7} A^2.B^3$$
$$+ \frac{19}{2^3.3^4.7^6} A^3.B.C - \frac{1}{2.3^3.5.7^5} A^4.B^2 - \frac{1}{2^2.3^5.5^2.7^3} A^5.C. \quad \text{(VII)}$$

Calcolo di J_9 — Dalla (31) e per le (24), (25) si ottiene

$$J_9 = (\varphi b)^4 (\varphi b')^4 = \frac{5^4}{3^2.7^8} B^2.D - \frac{5^2}{2^2.3^3.7^6} A^2.B.D + \frac{1}{2^6.3^4.7^4} A^4.D + \frac{2^5.5^4}{3^2.7^9} C^3$$
$$- \frac{2^3.5^5}{3^3.7^9} B^3.C + \frac{2^4.5^3}{3^3.7^8} A.B.C^2 - \frac{2.5^4}{3^4.7^8} A.B^4 + \frac{2.5^2}{3^2.7^7} A^2.B^2.C$$
$$+ \frac{2^2.5}{3^5.7^6} A^3.B^3 + \frac{2^2.5}{3^4.7^6} A^3.C^2 + \frac{5}{2^3.3^5.7^5} A^4.B.C - \frac{1}{2^5.3^5.5.7^4} A^5.B^2. \quad \text{(VIII)}$$

Calcolo di J_{10}—Si ha infine dalla (32) e per le (24), (25), (26) e (27):

$$J_{10} = (gb)^4 (gb')^4 = - \frac{2^3.5^4}{3^2.7^9} B.C.D - \frac{5^3}{3^2.7^8} A.B^2.D + \frac{5^2}{3^3.7^7} A^2.C.D$$
$$+ \frac{5}{2.3^4.7^6} A^3.B.D - \frac{1}{2^6.3^5.5.7^4} A^5.D + \frac{5^4.11}{3^2.7^{11}} B^5 + \frac{2.5^4.887}{3^3.7^{11}} B^2.C^2$$
$$+ \frac{2^5.5^3.13}{3^3.7^{10}} A.C^3 + \frac{5^4.13}{2.3^4.7^9} A^2.B.C^2 + \frac{2^2.5^3.349}{3^4.7^{10}} A.B^3.C$$
$$+ \frac{5^4.11}{2^2.3^4.7^9} A^2.B^4 - \frac{5.269}{2.3^5.7^8} A^3.B^2.C - \frac{13.61}{2^5.3^5.7^7} A^4.C^2 - \frac{41.53}{2^6.3^6.7^7} A^4.B^3$$
$$- \frac{5}{2^3.3^6.7^6} A^5.B.C + \frac{1}{2^5.3^6.5^2.7^4} A^6.B^2. \quad \text{(IX)}$$

SULL' HESSIANA DEL PRODOTTO DI DUE FORME TERNARIE

Nota del dott. **F. Gerbaldi**, in Roma.

Adunanza del 24 febbraio 1889.

In una Nota pubblicata in questi *Rendiconti* (pag. 22 del presente volume) ho avuto occasione di stabilire una formola che esprime l'Hessiana del prodotto di due forme binarie per mezzo delle forme invariantive di queste. La formola analoga per due forme ternarie fu già data dal Salmon (*), ma senza dimostrazione; i calcoli che ad essa conducono mi sembrano interessanti, e siccome non mi consta che siano stati da alcuno pubblicati, così mi sono proposto di svolgerli nella presente Nota.

Siano due forme ternarie

$$f_1 = a_x^m = a'^m_x = \ldots \qquad f_2 = b_x^n = b'^n_x = \ldots$$

di queste ci occorrono le seguenti forme invariantive

$$F_{11} = u_\alpha^2 A_x^{2m-4} = (aa'u)^2 a_x^{m-2} a'^{m-2}_x, \qquad A_1 = (aa'a'')^2 a_x^{m-2} a'^{m-2}_x a''^{m-2}_x,$$

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{ll} F_{12} = u_\gamma^2 \Gamma_x^{m+n-4} = (abu)^2 a_x^{m-2} b_x^{n-2}, & \Theta_1 = (aa'b)^2 a_x^{m-2} a'^{m-2}_x b_x^{n-2}, \\ F_{22} = u_\beta^2 B_x^{2n-4} = (bb'u)^2 b_x^{n-2} b'^{n-2}_x, & \Theta_2 = (abb')^2 a_x^{m-2} b_x^{n-2} b'^{n-2}_x, \end{array} \right.$$

$$\Phi_{12} = (\alpha\beta x)^2 A_x^{2m-4} B_x^{2n-4}, \qquad A_2 = (bb'b'')^2 b_x^{n-2} b'^{n-2}_x b''^{n-2}_x.$$

(*) *Traité de géométrie analytique — Courbes planes* — N°. 242.

e la forma con due serie di variabili cogredienti x, y, che si deduce da F_{12} col porre $u_i = (xy)_i$

$$h_y^2 H_x^{m+n-2} = (\tau x y)^2 T_x^{m+n-4},$$

e che indicheremo semplicemente con h, quando si considera come funzione soltanto delle y.

Denotiamo per brevità con h_α, h_τ, h_β le forme seguenti

$$h_\alpha = h_\alpha^2 A_x^{2m-4} H_x^{p-2} = (\alpha \tau x)^2 A_x^{2m-4} T_x^{p-4}$$

$$h_\tau = h_\tau^2 T_x^{p-4} H_x^{p-2} = (\tau \tau' x)^2 T_x^{p-4} T'^{p-4}_x \qquad (p = m + n)$$

$$h_\beta = h_\beta^2 B_x^{2n-4} H_x^{p-2} = (\beta \tau x)^2 B_x^{2n-4} T_x^{p-4}$$

e osserviamo che si ha

$$h_x h_y H_x^{p-2} = 0 \text{ identicamente},$$

$$(h h' u)^2 H_x^{p-2} H'^{p-2}_x = (h u, \ \tau x)^2 H_x^{p-2} T_x^{p-4}$$

$$= (h_\tau u_x - h_x u_\tau)^2 H_x^{p-2} T_x^{p-4} = h_\tau u_x^2 .$$

Consideriamo la forma che nasce dal prodotto delle due forme ternarie date

$$U = U_x^p = U'^p_x = f_1 f_2 = a_x^m b_x^n$$

e facciamone la seconda polare

$$p(p-1) U_x^{p-2} U_y^2 = m(m-1) a_x^{m-2} a_y^2 . f_2 + 2mn a_x^{m-1} b_x^{n-1} a_y b_y + n(n-1) b_x^{n-2} b_y^2 . f_1 ;$$

questa, in virtù della identità

$$2 a_x^{m-1} b_x^{n-1} a_y b_y = a_x^{m-2} a_y^2 . \ f_2 + b_x^{n-2} b_y^2 . \ f_1 - h_y^2 H_x^{p-2},$$

si può scrivere

(2) $p(p-1)U_x^{p-2}U_y^2=m(p-1)a_x^{m-2}a_y^2.\ f_2+n(p-1)b_x^{n-2}b_y^2.\ f_1-mnh_y^2H_x^{p-2}.$

Qui si ponga successivamente

$$y_i=(U'u)_i\,,\quad y_i=(a\,u)_i\,,\quad y_i=(b\,u)_i\,,\quad y_i=(h\,u)_i$$

e si moltiplichi rispettivamente per

$$U'^{p-2}_x,\qquad a_x^{m-2},\qquad b_x^{n-2},\qquad H_x^{p-2}.$$

Se per brevità si denota con $[P,\ Q,\ R]$ la forma invariantiva

$$(P\,Q\,R)^2\,P_x^{p-2}\,Q_x^{q-2}\,R_x^{r-2}$$

di tre forme dei gradi $p,\ q,\ r$; si ha

(3) $p(p-1)[U,U,u]=m(p-1)[U.f_1,u]f_2+n(p-1)[U,f_2,u]f_1-mn[U,h,u]$

(4) $p(p-1)[U,f_1,u]=m(p-1)F_{11}f_2+n(p-1)F_{12}f_1-mn[f_1,h,u]$

(5) $p(p-1)[U,f_2,u]=m(p-1)F_{12}f_2+n(p-1)F_{22}f_1-mn[f_2,h,u]$

(6) $p(p-1)[U,h,u]=m(p-1)[h,f_1,u]+n(p-1)[h.f_2,u]-mnh_T.$

Si moltiplichi la (3) per $p(p-1)$, la (4) per $(p-1)\,mf_2$, la (5) per $(p-1)nf_1$ e la (6) per $-mn$, poi si sommi membro a membro; si ha

$$(7)\quad p^2(p-1)^2[U,\ U,\ u]=(p-1)^2\{m^2F_{11}f_2^2+2\,m\,n\,F_{12}f_1f_2+n^2F_{22}f_1^2\}$$
$$-\,2\,m\,n(p-1)\,\{m\,[f_1,\ h,\ u]f_2+n\,[f_2,\ h,\ u]f_1\}$$
$$+\,m^2n^2h_T.\ u_x^2$$

donde, ponendo $u_i=U_i$ e poi moltiplicando per U_x^{p-2}, si ricava

$$(8)\qquad p^2(p-1)^2[U,\ U,\ U]$$

$$=(p-1)^2\{m^2[f_1,\ f_1,\ U]\,f_2^2+2mn[f_1,\ f_2,\ U]f_1f_2+n^2[f_2,\ f_2,\ U]f_1^2\}$$

$$-2mn(p-1)\{m[f_1,\ h,\ U]f_2+n[f_2,\ h,\ U]f_1\}$$

$$+m^2n^2h_\tau f_1f_2.$$

Si ponga ancora nella (2) successivamente

$$u_i=(aa')_i,\quad u_i=(ab)_i,\quad u_i=(bb')_i,\quad u_i=(ah)_i,\quad u_i=(bh)_i$$

e si moltiplichi rispettivamente per

$$a_x^{m-2}a'^{m-2}_x,\quad a_x^{m-2}b_x^{n-2},\quad b_x^{n-2}b'^{n-2}_x,\quad a_x^{m-2}H_x^{p-2},\quad b_x^{n-2}H_x^{p-2}$$

si avrà

$$(9)\quad p(p-1)[f_1,\ f_1,\ U]=m(p-1)A_1f_2+n(p-1)\Theta_1f_1-mnh_\alpha$$

$$(10)\quad p(p-1)[f_1,\ f_2,\ U]=m(p-1)\Theta_1f_2+n(p-1)\Theta_2f_1-mnh_\tau$$

$$(11)\quad p(p-1)[f_2,\ f_2,\ U]=m(p-1)\Theta_2f_2+n(p-1)A_2f_1-mnh_\beta$$

$$(12)\quad p(p-1)[f_1,\ h,\ U]=m(p-1)h_\alpha f_2+n(n-1)h_\tau f_1$$

$$(13)\quad p(p-1)[f_2,\ h,\ U]=m(m-1)h_\tau f_2+n(p-1)h_\beta f_1.$$

Si moltiplichi la (8) per p, la (9) per $m^2(p-1)f_2^2$, la (10) per $2mn(p-1)f_1f_2$, la (11) per $m^2(p-1)$, la (12) per $-2m^2n$, e la (13) per $-2mn^2$, e poi si sommi, si avrà

$$(14)\qquad p^3(p-1)^2[U,\ U,\ U]=$$

$$(p-1)^2[m^3A_1f_2^3+3m^2n\Theta_1f_2^2f_1+3mn^2\Theta_2f_1f_2^2+n^3A_2f_1^3]$$

$$-3m^3n(p-1)h_\alpha.\ f_2^2-3m^2n^2(p-2)h_\tau.\ f_1f_2-3mn^3(p-1)h_\beta.\ f_1^2.$$

Ed ora restano h_α, h_τ, h_β da esprimere per mezzo delle (1). A questo scopo si introduca l'operazione

$$\delta = \sum \frac{\partial}{\partial a_{ikl}} b_{ikl}$$

e si osservi che

$$\delta f_1 = f_2, \qquad \delta f_2 = 0,$$

$$\delta F_{11} = 2F_{12}, \quad \delta F_{12} = F_{22}, \qquad \delta F_{22} = 0,$$

$$\delta A_1 = 3\Theta_1, \qquad \delta \Theta_1 = 2\Theta_2, \qquad \delta \Theta_2 = A_2, \qquad \delta A_2 = 0.$$

Inoltre, considerisi la conica polare del punto y rispetto alla curva $f_1 = 0$; essa ha per equazione, in coordinate di punti: $a_y^{m-2} a_x^2 = 0$, ed in coordinate di rette: $u_\alpha^2 A_y^{2m-4} = 0$; ed ha per discriminante

$$(aa'a'')^2 \; a_y^{m-2} a'^{m-2}_y a''^{m-2}_y;$$

si ricordi l'identità

$$(\alpha\alpha' x)^2 A_y^{2m-4} A'^{2m-4}_y = \frac{4}{3} (aa'a'')^2 a_y^{m-2} a'^{m-2}_y a''^{m-2}_y . a_y^{m-2} a_x^2$$

donde per $y_i = x_i$ segue quest'altra

$$(\alpha\alpha' x)^2 A_x^{2m-4} A'^{2m-4}_x = \frac{4}{3} A_1 f_1.$$

Su quest'ultima si operi tre volte di seguito col simbolo δ, e si avrà

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} h_\alpha &= \Theta_1 f_1 + \frac{4}{3} A_1 f_2 \\ h_\tau &= \Theta_2 f_1 + \Theta_1 f_2 - \frac{1}{2} \Phi_{12} \\ h_\beta &= \frac{4}{3} A_2 f_1 + \Theta_2 f_2. \end{aligned} \right.$$

Sostituendo queste espressioni nella (14) si ha finalmente

$$
\begin{aligned}
(16)\ p^3(p-1)^2(U,U,U) = {} & (m-1)(p-1)m^3 A_1 f_2^3 - 3(m-1)m^2 n\,\Theta_1 f_2^2 f_1 \\
& - 3(n-1)m n^2 \Theta_2 f_2 f_1^2 + (n-1)(p-1)n^3 A_2 f_1^3 \\
& + \tfrac{3}{2} m^2 n^2 (p-2)\Phi_{12} f_1 f_2
\end{aligned}
$$

e questa è la formola che si voleva dimostrare; l'accordo tra questa e quella citata del Salmon è evidente, quando si tenga conto delle relazioni

$$A_1 = \frac{6}{m^3(m-1)^3} H, \qquad A_2 = \frac{6}{n^3(n-1)^3} H',$$

$$\Theta_1 = \frac{2}{m^2(m-1)^2 n(n-1)} \Theta, \quad \Theta_2 = \frac{2}{m(m-1)n^2(n-1)^2} \Theta',$$

$$\Phi_{12} = \frac{4}{m^2(m-1)n^2(n-1)} W.$$

Se una delle forme è di 1° grado $f_2 = u_x$, la (16) si semplifica e diventa

$$\frac{(m+1)^3}{m-1}(U,\ U,\ U) = m^2 A_1 u_x^3 - 3(aa'u)^2 a_x^{m-2} a'^{m-2}_x . f_1 u_x\,,$$

donde segue che: se una curva si spezza in una retta ed in una curva d'ordine m, la sua Hessiana si spezza in quella stessa retta ed in una curva d'ordine $3m-4$, la quale taglia la retta negli m punti che questa ha in comune colla curva d'ordine m, ed in altri $2m-4$ punti, i quali stanno sulla curva

$$(a a' u)^2 a_x^{m-2} a'^{m-2}_x = 0$$

e quindi (per l'*Uebertragungsprincip*) formano il gruppo Hessiano dei primi m punti. E però: *se si hanno m rette, e se su ciascuna si prende il gruppo Hessiano degli $m-1$ punti d'incontro colle altre $m-1$ rette, si avranno $2m(m-3)$ punti, che stanno sopra una curva di ordine $2(m-3)$, la quale fa parte dell'Hessiana della curva d'ordine m degenere, costituita*

dalle m rette, essendo la rimanente parte dell'Hessiana composta delle stesse m rette. In particolare (per $m = 4$) l'Hessiana di un quadrilatero si compone del quadrilatero e di quella notevole conica, che è stata considerata la prima volta dal Prof. Cremona (*).

Roma, 16 febbrajo 1889.

F. GERBALDI.

(*) *Vedi* Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. II.—Quistione 28.ª, pag. 30.— Soluzione pag. 52.

NOTE FISICO-MATEMATICHE;

del prof. **E. Beltrami**, in Pavia.

(Lettera al prof. Ernesto Cesàro).

Adunanza del 10 marzo 1889.

Traggo occasione dall'interesse col quale Ella da qualche tempo si è data a coltivare gli studii di fisica matematica, alquanto negletti presso di noi, per comunicarle alcune piccole osservazioni, attinenti a tali studii.

La prima si riferisce ad un punto della teoria del magnetismo, e precisamente al potenziale d'un corpo magnetico sopra sè stesso, che è quanto dire alla misura dell'energia magnetica di questo corpo.

Denotando con V la funzione potenziale d'un tal corpo, si hanno per questa due distinte espressioni, che occorre quasi sempre di considerare ad un tempo. L'una è

$$V=\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}\alpha+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}\beta+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\gamma\right)dS,$$

dove a, b, c sono le coordinate dell'elemento dS del corpo, α, β, γ sono le componenti del momento magnetico riferito all'unità di volume ed r è la distanza dell'elemento dS dal punto potenziato. L'altra è

$$V=\int\frac{k\,dS}{r}+\int\frac{h\,d\sigma}{r},$$

dove dS ha lo stesso significato di dianzi, $d\sigma$ è l'elemento di ogni superficie che serva di limite al corpo o che ne separi due regioni di natura e però di distribuzione magnetica diversa, r è la distanza dell'elemento dS, oppure $d\sigma$, dal punto potenziato, e finalmente k ed h hanno i valori seguenti:

$$k = -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial a} + \frac{\partial\beta}{\partial b} + \frac{\partial\gamma}{\partial c}\right), \qquad h = -(\delta_n + \delta_{n'}),$$

nel secondo dei quali δ_n e $\delta_{n'}$ sono le componenti del momento $\delta(=\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2})$ secondo le due opposte normali n ed n' della superficie σ nel punto (a, b, c) di questa, coll'avvertenza che, ove si tratti della superficie limite, di cui sia n la normale interna, bisogna porre $\delta_{n'} = 0$.

Di queste due forme della funzione potenziale magnetica chiamerei volentieri la prima *forma polare*, la seconda *forma apolare*, e ciò per ragioni facilmente desumibili dalla loro rispettiva origine ed interpretazione.

Risultando dalla forma apolare di V che questa è funzione potenziale d'una distribuzione newtoniana mista, superficiale e cubica, si è tratti a prima vista ad assumere come espressione del potenziale P del corpo sopra sè stesso l'elegantissima formola di W. Thomson

$$P = \int \frac{\Delta_1 V}{8\pi} dS_\infty\,,$$

dove S_∞ indica lo spazio infinito: e tale non di rado si dice essere il potenziale d'un corpo magnetico. Ma forti ragioni impediscono di considerare questa come l'espressione completa del potenziale medesimo. Basti dire che con questa forma non si può render conto dell' induzione magnetica, ove si voglia che le equazioni di questa, come quelle dell'induzione elettrostatica, scaturiscano dalla necessità che, nello stato d'equilibrio magnetico fra l'inducente e l'indotto, il potenziale totale del sistema diventi un minimo. Seguendo l'accennata analogia elettrostatica si giunge invece, in diversi modi, a concludere che alla precedente espressione conviene aggiungere un termine della forma

$$\int \Psi(\alpha, \beta, \gamma)\, dS,$$

dove Ψ è una funzione quadratica ed omogenea delle tre componenti del momento unitario e dove l' integrazione si estende a tutto lo spazio occupato dal corpo. I coefficienti di questa funzione Ψ sono quantità che dipendono dalla natura fisica del corpo e che possono anche, almeno teoricamente, variare con data legge da punto a punto. Ma comunque esse possano variare, è sempre lecito, per ogni singolo punto del corpo, supporre gli assi orientati in modo che sia

$$\Psi = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\varkappa_x} + \frac{\beta^2}{\varkappa_y} + \frac{\gamma^2}{\varkappa_z}\right),$$

e le quantità $\varkappa_x$, $\varkappa_y$, $\varkappa_z$ sono allora, per quel punto, i coefficienti d'induzione del corpo nel senso dei tre assi, coefficienti che si riducono ad un solo $\varkappa (= \varkappa_x = \varkappa_y = \varkappa_z)$ quando il corpo è magneticamente isotropo, nel qual caso l'orientazione degli assi diventa indifferente. Con questi coefficienti si formano poi quelli cosidetti di permeabilità:

$$\mu_x = 1 + 4\pi\varkappa_x, \qquad \mu_y = 1 + 4\pi\varkappa_y, \qquad \mu_z = 1 + 4\pi\varkappa_z,$$

i quali sono specialmente notevoli per ciò che l'esperienza li additerebbe come costantemente positivi, mentre quelli d'induzione sono positivi per i corpi paramagnetici, negativi per i diamagnetici.

Premesso tutto ciò ed assumendo, in base al finquì detto,

$$P = \int \frac{\Delta_1 V}{8\pi} dS_\infty + \int \Psi dS$$

come espressione completa (o polare) del potenziale magnetico d'un corpo sopra sè stesso, e però come misura della sua energia magnetica, si presenta una quistione fondamentale, ed è questa. Se l'espressione precedente è veramente quella della totale energia magnetica del corpo, essa deve risultare sempre positiva, nè deve potersi ridurre a zero che mediante il totale annullamento d'ogni magnetizzazione, cioè per $\alpha = \beta = \gamma = 0$ in tutto il corpo, nel qual caso è anche $V = 0$. Ora, che la precedente espressione possegga effettivamente questo carattere, è manifesto senz'altro nel caso dei corpi paramagnetici, poichè allora

la quadratica Ψ è essenzialmente positiva: ma nel caso dei corpi diamagnetici, questa quadratica è negativa ed il segno di P riesce incerto.

Non mi è mai avvenuto, forse per imperfetta mia cognizione della bibliografia relativa all'argomento, di trovare discussa questa difficoltà: ma confesso che per lungo tempo non sono stato alieno dal credere alla possibilità di stabilire, coll'ajuto di qualche trasformazione opportuna, la positività di P come conseguenza di quella dei coefficienti μ. Solo recentemente mi sono persuaso del contrario, ed ecco come.

Ella sa che la forza esercitata da un corpo magnetico sopra uno dei proprii punti non è affatto determinata, nè determinabile, a cagione dell'ignoranza in cui siamo circa l'intima costituzione magnetica dei corpi. La forza che Maxwell denomina *magnetica*, e che è definita dalle componenti

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

non è che la *forza apolare*, quella, cioè, che si produrrebbe effettivamente se, invece della distribuzione polare (α, β, γ), esistesse nel corpo la distribuzione apolare (h, k), di pari funzione potenziale. Fra le molte altre forze che, sotto diversi punti di vista, si possono considerare come rappresentanti l'azione magnetica del corpo, ve n'è però una le cui componenti hanno le espressioni

$$X' = 4\pi\alpha - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y' = 4\pi\beta - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z' = 4\pi\gamma - \frac{\partial V}{\partial z}$$

(dove le α, β, γ si riferiscono agli argomenti x, y, z) e che, come tutte le altre testè accennate, si riduce alla precedente nei punti esterni al corpo. Essa è quella forza che Maxwell denomina *induzione magnetica* e che Thomson aveva già in tal qual modo contrapposto alla precedente colla nota considerazione delle « crevasses ». Si può credere, dietro certi indizii, che essa sia veramente da riguardarsi come quella che funge da *forza polare*, in opposizione alla apolare di dianzi. Ma checchè sia di ciò, egli è appunto colla considerazione di que-

sta forza che ho potuto risolvere la difficoltà circa il segno di P.

Si ha infatti

$$R^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 16\pi^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$
$$- 8\pi\left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right) + \Delta_1 V,$$

donde, integrando su tutto lo spazio,

$$\int \frac{R^2}{8\pi} dS_\infty = 2\pi \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dS$$
$$-\int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right) dS + \int \frac{\Delta_1 V}{8\pi} dS_\infty .$$

Da questa relazione, in virtù della ricordata formola di Thomson

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right) dS = \int \frac{\Delta_1 V}{4\pi} dS_\infty ,$$

si deduce l'eguaglianza

$$\int \frac{\Delta_1 V}{8\pi} dS_\infty = 2\pi \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dS - \int \frac{R^2}{8\pi} dS_\infty ,$$

la quale permette di porre la precedente espressione del potenziale sotto la nuova forma seguente:

$$P = \int [\Psi + 2\pi(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)] dS - \int \frac{R^2}{8\pi} dS_\infty .$$

Ora, qualunque sia il posto occupato nel corpo dall'elemento dS, si può sempre supporre, per ciò che ho già ricordato, che gli assi coordinati sieno orientati in modo da rendere, in quel posto,

$$\Psi + 2\pi(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\varkappa_x} + \frac{\beta^2}{\varkappa_y} + \frac{\gamma^2}{\varkappa_z}\right) + 2\pi(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(1 + 4\pi\varkappa_x)\alpha^2}{\varkappa_x} + \frac{(1 + 4\pi\varkappa_y)\beta^2}{\varkappa_y} + \frac{(1 + 4\pi\varkappa_z)\gamma^2}{\varkappa_z}\right\}$$

$$= \frac{\mu_x \alpha^2}{2\varkappa_x} + \frac{\mu_y \beta^2}{2\varkappa_y} + \frac{\mu_z \gamma^2}{2\varkappa_z}.$$

Ammesso che i coefficienti di permeabilità μ_x, μ_y, μ_z sieno sempre positivi, il segno di quest'espressione è positivo nei corpi paramagnetici, negativo nei diamagnetici: tale è, per conseguenza, il segno del primo termine della nuova espressione trovata per P, qualunque sia l'orientazione degli assi. Poichè dunque l'altro termine è essenzialmente negativo, si deve concludere che, per i corpi diamagnetici, la quantità P è sempre negativa e non si annulla che per $\alpha = \beta = \gamma = 0$, nel qual caso è anche $V = 0$ e quindi $R = 0$. L'energia d'un corpo diamagnetico avrebbe dunque un valore *negativo*.

Questo risultato ne trae con sè un altro, che non è meno inverosimile. È noto che se alla distribuzione indotta in un corpo da azioni magnetiche esterne, date ed invariabili, si sovrappone un'altra distribuzione magnetica qualunque, il potenziale di tutto il sistema si accresce d'una quantità che è semplicemente eguale al potenziale della distribuzione sovrapposta all'indotta. Risulta di qui, tenendo conto del risultato precedente, che se il corpo indotto è paramagnetico, il potenziale totale aumenta quando cessa l'equilibrio d'induzione, mentre, se il corpo è diamagnetico, il potenziale diminuisce: nel primo caso dunque il potenziale totale sarebbe minimo nello stato d'equilibrio, nel secondo invece sarebbe massimo, cioè l'equilibrio d'induzione diamagnetica sarebbe instabile.

Queste incongruenze mi sembrano tali da rendere sempre più probabile la nota ipotesi di Faraday, d'una polarizzabilità di tutto lo spazio, con coefficiente positivo per questo come per ogni corpo in esso immerso: mercè quest'ipotesi l'induzione diamagnetica viene ridotta, com'è noto, ad una mera apparenza.

Gli altri argomenti su cui mi proponevo d'intrattenerla si riferi-

vano alla teoria dell'elasticità: ma per questa volta mi limiterò a semplici osservazioni d'indole didattica, suggeritemi da alcuni passi dell'interessante Corso litografato di Lezioni sull'anzidetta teoria, che Ella si compiacque d'inviarmi.

Per dedurre le espressioni del potenziale unitario d'elasticità, nelle diverse ipotesi particolari che si sogliono fare circa la natura del mezzo elastico cui il potenziale deve riferirsi, si fa uso quasi sempre di certe trasformazioni di coordinate, le quali devono lasciare inalterato il potenziale medesimo. Questa considerazione, la quale conduce a calcoli più o meno prolissi e poco eleganti, può essere del tutto eliminata invocando le proprietà invariantive delle sei componenti di deformazione, cioè di quelle sei quantità che designerò, com'Ella fa seguendo il Betti ed altri Autori, con a, b, c, f, g, h, dove

$$a=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad b=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad c=\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$2f=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\qquad 2g=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\qquad 2h=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Spiegherò il mio concetto con un solo esempio, il quale è però sufficiente a far comprendere di che si tratti.

Dall'equazione di 3° grado che porge le tre dilatazioni principali risulta immediatamente che le tre espressioni

$$a+b+c,$$

$$bc-f^2+ca-g^2+ab-h^2,$$

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

sono invarianti ortogonali di deformazione, sono, cioè, quantità che non cambiano di valore, in ciascun punto del mezzo, qualunque sia la terna ortogonale d'assi di riferimento. Queste quantità s'incontrano del resto, con altra interpretazione, fin dai primi passi nella teoria delle superficie di second'ordine.

Ora supponiamo che si voglia assegnare la forma del potenziale d'elasticità per quei mezzi che presentano il carattere della cosidetta isotropia incompleta, per i quali, cioè, esiste in ogni punto un asse d'elasticità distinto, di data direzione, mentre ogni direzione normale a questa appartiene ad un altro asse d'elasticità, indistinto od indifferente. Questa costituzione teorica del mezzo rappresenterebbe abbastanza bene, secondo il competentissimo De Saint Venant, il carattere elastico dei corpi dotati di struttura fibrosa, e si presta perciò molto opportunamente alla trattazione dei problemi che si devono risolvere in vista di pratiche applicazioni.

Supponiamo che la direzione dell'asse distinto d'elasticità sia quella delle z. Ordinando come segue rispetto a c i tre invarianti sopra citati:

$$(a+b)+c\,,$$

$$(ab-f^2-g^2-h^2)+(a+b)c\,,$$

$$(2fgh-af^2-bg^2)+(ab-h^2)c\,,$$

si riconosce immediatamente che quando, restando fisso l'asse delle z, si spostano gli altri due assi, rimane invariata non solo la quantità c, dilatazione arbitraria nel senso dell'asse fisso, ma eziandio ciascuna delle espressioni seguenti:

$$a+b\,, \qquad ab-f^2-g^2-h^2\,, \qquad ab-h^2\,,$$

$$2fgh-af^2-bg^2\,.$$

Abbandonando l'ultima di queste, che è di grado superiore al secondo, e semplificando la seconda per mezzo della terza, si hanno dunque quattro espressioni di primo e di secondo grado, cioè

$$a+b\,, \qquad c\,, \qquad ab-h^2\,, \qquad f^2+g^2\,,$$

che non cambiano di valore nella trasformazione e colle quali si possono formare *cinque*, e non più, espressioni linearmente indipendenti di

secondo grado, dotate della stessa proprietà, cioè

$$(a+b)^2, \quad (a+b)c, \quad c^2, \quad ab-h^2, \quad f^2+g^2.$$

Sommando queste cinque espressioni, moltiplicate per altrettante costanti, si ottiene l'espressione cercata

$$\Pi = \frac{1}{2} A(a+b)^2 + B(a+b)c + \frac{1}{2}Cc^2$$
$$+ D(h^2 - ab) + E(f^2 + g^2)$$

del potenziale unitario d'un mezzo elastico dotato d'isotropia incompleta, sotto la forma che è la più comoda nelle applicazioni, come ho potuto verificare in molte circostanze. Nè si può dubitare che questa forma non sia la più generale possibile, se si riflette che i nove coefficienti di Π per i mezzi dotati di tre assi distinti d'elasticità si riducono già a sei, quando due di questi assi sono fra loro permutabili, e che l'ulteriore restrizione, inclusa nel concetto di isotropia incompleta, deve assorbire almeno uno di questi sei coefficienti.

Le sei componenti di pressione X_x, X_y, etc. hanno gli identici invarianti di quelle di deformazione e però si può affermare *a priori* che il potenziale dello stesso mezzo, espresso per queste nuove componenti, deve prendere l'analoga forma

$$\Pi = \frac{1}{2} A'(X_x + Y_y)^2 + B'(X_x + Y_y)Z_z + \frac{1}{2} C'Z_z^2$$
$$+ D'(X_y^2 - X_x Y_y) + E'(Y_z^2 + Z_x^2).$$

Un facile calcolo conduce a trovare, per i nuovi coefficienti costanti di questa seconda espressione, i valori seguenti:

$$A' = \frac{AC - B^2}{DK}, \quad B' = -\frac{B}{K}, \quad C' = \frac{2A - D}{K},$$

$$D' = \frac{1}{D}, \quad E' = \frac{1}{E}, \quad K = 2(AC - B^2) - CD.$$

Mediante queste relazioni si rende agevolissima la determinazione dei moduli d'elasticità, dei coefficienti di contrazione, ecc.

Ancora un'osservazione, che sarà l'ultima per ora.

Nel di Lei Corso litografato Ella ha voluto riprodurre in Nota la dimostrazione da me data della sufficienza delle sei note equazioni

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right), \quad \text{ecc.}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \text{ecc.}$$

che si sogliono dedurre come condizioni semplicemente necessarie a soddisfarsi dalle sei componenti d'una deformazione possibile. Io credo che quella dimostrazione sia opportuna ad esporsi in un Corso, poichè le varie formole che vi si svolgono trovano poi tutte la loro applicazione nelle più importanti questioni d'elasticità (*). È però utile osservare che la sufficienza delle equazioni in discorso può essere stabilita in un modo del quale non può immaginarsi il più perentorio, cioè coll'integrazione diretta, la quale riesce facilissimamente, così:

Si rappresentino con U, V, W tre funzioni totalmente arbitrarie e si ponga, com'è evidentemente lecito di fare,

$$a = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad b = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad c = \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Le equazioni in discorso diventano (scrivendo sempre la prima soltanto d'ogni terna)

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(2f - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0.$$

S'integrano le prime tre ponendo

$$2f = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} + 2f',$$

(*) Nel N. 10 dei *Comptes Rendus* di quest'anno ho indicato un altro singolare modo di stabilire le proprietà di queste equazioni.

dove f', g', h' sono tre funzioni soggette alle condizioni

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 g'}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial y} = 0 .$$

Le altre tre, sostituendo per f, g, h i valori precedenti, diventano

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g'}{\partial y} + \frac{\partial h'}{\partial z} - \frac{\partial f'}{\partial x}\right) = 0$$

e danno, con una prima integrazione,

$$\frac{\partial g'}{\partial y} + \frac{\partial h'}{\partial z} - \frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z},$$

dove X, Y, Z sono tre funzioni arbitrarie, di cui però la prima non deve contenere x, la seconda y, la terza z. Da queste ultime equazioni si ricava

$$2\frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{\partial^2 Y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}, \text{ ossia } \frac{\partial}{\partial x}\left(2f' - \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) = 0,$$

donde, integrando di nuovo,

$$2f' = \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} + X_1 ,$$

dove X_1, Y_1, Z_1 sono tre funzioni arbitrarie dello stesso tipo di X, Y, Z, ma di forma più particolare. Dovendo infatti aversi

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 X_1}{\partial y \partial z} = 0,$$

è chiaro che X_1 deve risolversi nella somma di due funzioni, l'una della sola y, l'altra della sola z; e così dicasi di Y_1 e Z_1. Si può dun-

che porre

$$X_1 = \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial z}, \quad Y_1 = \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x}, \quad Z_1 = \frac{\partial \xi_3}{\partial x} + \frac{\partial \eta_3}{\partial y},$$

dove ξ_2, ξ_3 sono funzioni arbitrarie della sola x,

» η_3, η_1 » » » y,

» ζ_1, ζ_2 » » » z.

Facendo le debite sostituzioni successive si ottiene così:

$$2f = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z}$$

e si può scrivere

$$2f = \frac{\partial(W + Z + \xi_2 + \eta_1)}{\partial y} + \frac{\partial(V + Y + \zeta_1 + \xi_3)}{\partial z},$$

$$2g = \frac{\partial(U + X + \eta_3 + \zeta_2)}{\partial z} + \frac{\partial(W + Z + \xi_2 + \eta_1)}{\partial x},$$

$$2h = \frac{\partial(V + Y + \zeta_1 + \xi_3)}{\partial x} - \frac{\partial(U + X + \eta_3 + \zeta_2)}{\partial y}.$$

Con ciò le sei equazioni sono completamente integrate e basta po-

$$U + X + \eta_3 + \zeta_2 = u,$$

$$V + Y + \zeta_1 + \xi_3 = v,$$

$$W + Z + \xi_2 + \eta_1 = w,$$

donde

$$a = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

per riconoscere che le espressioni così ottenute per a, b, c, $2f$, $2g$, $2h$ sono precisamente quelle volute dalla definizione di queste quantità, come componenti di deformazione: è d'altronde evidente che le funzioni u, v, w, con cui queste quantità restano formate, sono interamente arbitrarie.

Per trattare i problemi del genere di quello che porta il nome di De Saint Venant, giova poter disporre arbitrariamente di alcune delle sei componenti di deformazione. Esaminando questo punto alquanto più da vicino ho potuto convincermi che si possono assumere ad arbitrio tre delle quantità a, b, c, f, g, h, purchè non sieno quelle che si trovano già associate fra loro in una delle tre equazioni di condizione formanti la prima delle due terne testè ricordate. Per conseguenza, delle 20 terne che si possono formare colle sei componenti suddette, sono 17 quelle per una delle quali si può, in un determinato problema, fissare ad arbitrio la forma di tutte tre le funzioni che la compongono.

Pavia, 5 marzo 1889.

E. Beltrami.

LINEE GEODETICHE

TRACCIATE SOPRA TALUNE SUPERFICIE.

Nota di **M. L. Albeggiani**, in Palermo.

Adunanza del 24 marzo 1889.

In questa Nota sarà applicato alla ricerca delle linee geodetiche un metodo elegante sviluppato nei suoi particolari dal sig. Darboux nella di lui interessante opera: *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Paris, 1887-89: sul proposito può anche confrontarsi la recente monografia del sig. Knoblauch, *Einleitung in die allgemeine Theorie der Krummen Flächen*, Leipzig, 1888.

Esporrò nella parte I il metodo sudetto e ne farò poi applicazione, nella parte III, al ritrovamento delle equazioni funzionali delle geodetiche di talune superficie, non lasciando di tener presente la classificazione delle stesse fatta dal sig. Sophus Lie nella pregevole Memoria *Untersuchungen über geodätische Curven* (*Math. Ann.*, B. XX, S. 357), della quale classificazione sarà tenuto ragionamento nella II parte del presente lavoro. Sarà oggetto di altra Nota lo studio delle principali proprietà di cui godono le più interessanti tra le geodetiche delle quali si sono in questa ottenute le equazioni in termini finiti.

I

1. Si consideri la superficie rappresentata dalle equazioni:

$$x = \varphi_1(u,v), \qquad y = \varphi_2(u,v), \qquad z = \varphi_3(u,v), \tag{1}$$

nelle quali le u, v indicano due sistemi di linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ tracciate sopra la superficie ed i cui valori particolari si assumono come coordinate (curvilinee) di ciascun punto della stessa. Ponendo al solito:

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

l'elemento lineare della superficie prende, come è noto, la forma

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Siano ora

$$\theta = \theta(u,v), \qquad \theta_1 = \theta_1(u,v) \tag{2}$$

certe due funzioni di u, v supposte tali che l'equazione $\theta_1 = \text{cost.}$ rappresenti una famiglia di geodetiche della superficie (1) e che l'equazione $\theta = \text{cost.}$ rappresenti la famiglia di curve trajettorie ortogonali delle geodetiche considerate; le curve $\theta = \text{cost.}$ costituiscono ciò che si dice una famiglia di *linee geodeticamente parallele* o semplicemente di *curve parallele.*

Suppongansi inoltre le funzioni θ, θ_1 tali che per ogni punto della superficie, o di una regione di essa, passi una sola coppia di curve appartenenti alle due famiglie, di maniera che ogni coppia di valori dei parametri θ, θ_1 determina univocamente un punto della superficie, o della regione, considerata, e viceversa, o che è lo stesso, le funzioni θ, θ_1 siano tali che ad ogni coppia di valori di u, v risponda una sola coppia di valori di θ, θ_1 e viceversa; si ottiene così un nuovo sistema di coordinate curvilinee θ, θ_1 legato al precedente dalle relazioni (2): cerchiamo quale sarà nel nuovo sistema coordinato l'espressione dell'elemento lineare della superficie.

Dette E', F', G' le analoghe delle E, F, G nel nuovo sistema, cioè:

$$E' = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2, \quad F' = \sum\frac{\partial x}{\partial \theta}\,\frac{\partial x}{\partial \theta_1}, \quad G' = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial \theta_1}\right)^2,$$

si ha da prima $F' = 0$, di poi, essendo le curve $\theta_1 = \text{cost.}$ geodetiche della superficie, l'equazione differenziale delle geodetiche, la quale, nell'ipotesi $F' = 0$, è la

$$2 E' G' (d\theta d^2\theta_1 - d\theta_1 d^2\theta)$$

$$= E' \frac{\partial E'}{\partial \theta_1} d\theta^3 + \left(G' \frac{\partial E'}{\partial \theta} - 2 E' \frac{\partial G'}{\partial \theta}\right) d\theta^2 d\theta_1$$

$$- \left(E' \frac{\partial G'}{\partial \theta_1} - 2 G' \frac{\partial E'}{\partial \theta_1}\right) d\theta\, d\theta_1^2 - G' \frac{\partial G'}{\partial \theta}\, d\theta_1^3,$$

deve essere soddisfatta da $d\theta_1 = 0$, il che ha luogo quando abbiasi

$$\frac{\partial E'}{\partial \theta_1} = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad E' = E'(\theta),$$

allora scrivendo, per non introdurre nuovi simboli, ancora $d\theta$ per $\sqrt{E'}d\theta$, posto $G' = \sigma^2$, si trova che l'elemento lineare della superficie viene espresso dalla:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2.$$

Egli è d'altra parte evidente che, se le condizioni

$$E' = 1, \qquad F' = 0$$

sono soddisfatte, le curve $\theta_1 = \text{cost.}$ sono geodetiche della superficie e quindi le curve $\theta = \text{cost.}$ sono le loro trajettorie ortogonali, difatti, in virtù delle poste condizioni, l'equazione differenziale delle geodetiche, testè scritta, resta identicamente verificata per $d\theta_1 = 0$.

Osserviamo infine che nella forma or ora trovata dell'elemento

lineare della superficie, il parametro θ indica l'arco delle geodetiche θ_1 contato a partire da una trajettoria ortogonale fissa $\theta = 0$.

2. Per venire ora alla determinazione delle funzioni θ, θ_1, σ osserviamo, che esse sono funzioni di u, v tali da aversi identicamente

$$(3) \qquad E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 = d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2.$$

Pertanto, avuto riguardo alla natura delle funzioni θ, θ_1 e posto:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial u} & \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \end{vmatrix},$$

dalle (2) si ha per inversione:

$$D\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial \theta_1}{\partial v}, \quad D\frac{\partial u}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad D\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial \theta_1}{\partial u}, \quad D\frac{\partial v}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

onde:

$$(4) \qquad \begin{aligned} D du &= \frac{\partial \theta_1}{\partial v} d\theta - \frac{\partial \theta}{\partial v} d\theta_1, \\ D dv &= -\frac{\partial \theta_1}{\partial u} d\theta + \frac{\partial \theta}{\partial u} d\theta_1 \end{aligned}$$

ed inoltre

$$(5) \qquad D^2 \sigma^2 = EG - F^2 \ (^*).$$

Sostituendo quindi nel primo membro della (3) le espressioni di du, dv tratte dalle (4) e comparando i coefficienti di $d\theta^2$, $d\theta d\theta_1$, $d\theta_1^2$, tenendo presente la (5), si trova:

(*) Cfr. Knoblauch, l. c., pag. 13.

$$(6)\qquad E\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\frac{\partial\theta_1}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)^2 = \frac{EG-F^2}{\sigma^2},$$

$$(7)\qquad E\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\theta_1}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta_1}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right) + G\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta_1}{\partial u} = 0,$$

$$(8)\qquad E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 = EG-F^2.$$

Pongasi

$$\frac{E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2} = \Delta\,\theta$$

e dicasi, con Beltrami, tale espressione: *parametro differenziale del 1° ordine di* θ, allora la (8) prende la forma

$$(9)\qquad \Delta\theta = 1.$$

Il soddisfacimento della (9) dice che il polinonio omogeneo di 2° grado in du, dv

$$ds^2 - d\theta^2 \equiv \left\{E - \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2\right\}du^2 + 2\left\{F - \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right\}du\,dv + \left\{G - \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2\right\}dv^2$$

è un quadrato perfetto, quindi qualunque siano du, dv, se la (9) è soddisfatta, si può porre:

$$ds^2 - d\theta^2 = (m\,du + n\,dv)^2,$$

dove m, n sono certe due funzioni di u, v. Ora è noto che si può sempre determinare un fattore $\frac{1}{\sigma}$. funzione di u e di v, tale da aversi

$$\frac{m\,du + n\,dv}{\sigma} = d\theta_1$$

e però:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2$$

dove θ_1 è funzione diversa dalla θ ed il determinante $D \neq 0$ chè altrimenti ds^2 sarebbe un quadrato perfetto, contro l'ipotesi. Da quanto precede si può concludere, che ad ogni soluzione della (9) risponde una famiglia di curve parallele cioè di curve le cui trajettorie ortogonali sono le geodetiche $\theta_1 = \text{cost.}$

Di tal che per determinare tutte le possibili linee parallele giacenti sopra una superficie data (1) bisogna integrare generalmente l'equazione (9), in seguito l'integrazione della (7) permette di determinare la funzione θ_1 di maniera che le curve $\theta_1 = \text{cost.}$, le cui traiettorie ortogonali sono le curve $\theta = \text{cost.}$, siano linee geodetiche della superficie; finalmente la (6) dà l'espressione di σ^2.

3. Frattanto si può effettuare la determinazione della funzione θ_1 dopo aver trovato l'integrale generale della (9), od anche l'integrale completo, senza eseguire alcun'altra integrazione.

Suppongasi infatti che, volendo procedere alla integrazione della equazione alle derivate parziali del 1° ordine (9), siansi determinate per mezzo del sistema di equazioni differenziali ordinarie corrispondente alla (9), le $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$, soddisfacenti alla equazione data ed alle condizioni d'integrabilità, quali funzioni di u, v e di *una costante arbitraria* a la quale figura almeno in una di esse, in tal caso l'integrale θ contiene la costante a, oltre di quella che può essere aggiunta a θ per addizione e soddisfa identicamente all'equazione (8), la quale derivata parzialmente rapporto ad a, poichè E, F, G non contengono a, dà:

$$(10)\quad E\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial a} - F\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial a} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial a}\right) + G\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial a} = 0.$$

La (10) coincide con la (7) ove in questa si scriva $\frac{\partial\theta}{\partial a}$ per θ_1, ma se l'integrale $\theta(u, v, a)$ soddisfa identicamente alla (8), la funzione $\frac{\partial\theta}{\partial a}$

soddisfa identicamente alla (10) quindi

$$\theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial a} = \text{cost.} = a'$$

è un integrale della (7), cioè per determinare la funzione θ_1 basta derivare l'integrale θ rispetto alla costante a.

Il precedente ragionamento non soffre variazione nel caso in cui l'integrale θ, in luogo di contenere la costante a, contenga una funzione arbitraria il cui argomento è funzione determinata di u e di v ottenuta per l'integrazione del sistema di equazioni differenziali ordinarie sudette, soltanto devesi allora intendere che le differenziazioni rispetto ad u ed a v siano *complete* vale a dire supponendo a funzione di u e di v.

L'equazione $\frac{\partial \theta}{\partial a} = a'$ contiene pertanto due costanti arbitrarie delle quali si può disporre per far passare la linea geodetica per un punto dato (u_0, v_0) e secondo una direzione assegnata, vale a dire in modo da avere in quel punto una tangente determinata. Infatti è chiaro che la curva

$$\theta_1(u, v, a) = \theta_1(u_0, v_0, a) \tag{11}$$

passa pel punto (u_0, v_0) pel quale passa pure la curva

$$\theta(u, v, a) = \theta(u_0, v_0, a) = \theta_0, \tag{12}$$

inoltre essendo le due curve (11), (12) ortogonali, l'angolo che la direzione positiva della curva (11) fa nel punto (u_0, v_0) con la direzione positiva della curva $v = \text{cost.}$ passante per lo stesso punto, è il complemento dell'angolo fatto in quel punto dalle direzioni positive delle curve (12) e $v = \text{cost.}$, detto ω il primo di questi angoli si ha quindi:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(E\frac{du_0}{dv_0} + F\right) \;(*)$$

(*) Cfr. p. es. Bianchi, *Geometria differenziale*, pag. 49.

dove $\frac{d u_0}{d v_0}$ indica ciò che diventa $\frac{du}{dv}$, tratto dalla equazione $\theta = \text{cost.}$, nel punto (u_0, v_0), cioè:

$$\frac{d u_0}{d v_0} = - \frac{\partial \theta_0}{\partial v_0} : \frac{\partial \theta_0}{\partial u_0} .$$

Per mostrare quindi che può darsi ad ω un valore a piacere basta mostrare che $\frac{d u_0}{d v_0}$ contiene la costante arbitraria a, basta perciò mostrare che il rapporto:

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} : \frac{\partial \theta}{\partial u} = \psi(u,v)$$

non è indipendente dalla costante a, per vero ove così fosse le $\frac{\partial \theta}{\partial u}, \frac{\partial \theta}{\partial v}$ ricavate dalla (9) e dalla $\frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \psi(u, v)$ sarebbero entrambe indipendenti da a contro l'ipotesi. Si può quindi determinare un valore della costante a' per modo che la curva

$$\theta_1 = a'$$

passi pel punto assegnato (u_0, v_0), e può inoltre determinarsi un valore della costante a tale che l'angolo ω abbia un valore dato prima, o altrimenti tale che la stessa curva

$$\theta_1 = a'$$

abbia in quel punto una tangente data. E poichè, come è noto, una linea geodetica è determinata dalle condizioni di passare per un punto dato ed avere ivi una tangente data, così l'equazione

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = a'$$

rappresenta tutte le possibili linee geodetiche tracciate sulla superficie.

Dopo ciò può enunciarsi il teorema:

Per determinare le linee geodetiche della superficie (1), *si consideri l'equazione alle derivate parziali del* 1° *ordine*

$$\Delta\theta = 1.$$

Ogni soluzione di questa equazione, eguagliata ad una costante, determinerà una famiglia di curve parallele. Se si ha una soluzione contenente una costante arbitraria a *l'equazione della linea geodetica la più generale è*

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = a',$$

e l'arco compreso fra due punti di questa linea geodetica è eguale alla differenza dei valori di θ *relativi a questi due punti* (*).

II.

4. Applicheremo il metodo esposto alle principali tra le superficie classificate dal sig. Lie nella Memoria citata, cioè a quelle superficie alle quali è permesso di potere imprimere uno scorrimento infinitesimale sopra sè stesse, per modo che ogni geodetica della superficie venga, dopo tale spostamento, a coincidere con altra sua geodetica infinitamente vicina.

Considereremo per ultimo il caso del paraboloide ellittico o iperbolico, il cui elemento lineare si presenta nella forma osservata da Liouville.

Mostriamo intanto in che consiste la classificazione razionale data dal sig. Lie per le superficie soddisfacenti alla condizione sudetta.

Si dice che sulle coordinate curvilinee u, v di un punto appartenente ad una superficie si opera una *trasformazione infinitesimale*, quando il sistema u, v viene trasformato nel sistema infinitamente vicino

(*) Cfr. Darboux, l. c., t. II; pag. 428.

$$u + \delta u = u + \pi(u, v)\delta t,$$

$$v + \delta v = v + \tilde{\omega}(u, v)\delta t,$$

a denotare tale operazione si scrivono le relazioni:

$$(13) \qquad \delta u = \pi(u, v)\delta t, \qquad \delta v = \tilde{\omega}(u, v)\delta t$$

dove π, $\tilde{\omega}$ sono funzioni di u e di v. Ad una trasformazione infinitesimale risponde evidentemente uno scorrimento infinitesimale della superficie, alla quale appartiene il punto considerato, sopra sè stessa, di maniera che una curva tracciata sulla superficie prende, dopo lo spostamento, una posizione diversa sulla stessa superficie coincidendo con altra sua curva infinitamente vicina, ed avviene, in generale, che l'elemento lineare, misurato sulla curva considerata, varia di lunghezza dopo lo spostamento, cioè ogni scorrimento infinitesimale della superficie sopra sè stessa è accompagnato, in generale, da uno stiramento (*Dehnung*).

Si consideri ora l'equazione differenziale

$$(14) \qquad \Phi\left(u, v, \frac{du}{dv}, \frac{d^2u}{dv^2}, \ldots\right) = 0$$

legata alla superficie, vale a dire tale che ad essa soddisfino certi enti il cui insieme forma una famiglia di curve tracciate sulla superficie; ciascun individuo della famiglia si dirà una *curva integrale* della (14) e sarà rappresentato dall'integrale di essa

$$f(u, v, a_1, a_2, \ldots) = 0$$

per certi particolari valori dati alle costanti o alle funzioni arbitrarie che vi si contengono; ciò posto diremo che l'equazione (14), e però anche la famiglia di curve da essa rappresentata, comporta la trasformazione infinitesimale (13), allora quando, operata siffatta trasformazione, ogni curva integrale viene nella posizione ad essa infinitamente vicina restando ancora curva integrale della (14), vale a dire allora quando l'espressione variata

$$f(u, v, a_1, a_2, \ldots) + \left[\pi \frac{\partial f}{\partial u} + \tilde{\omega} \frac{\partial f}{\partial v}\right] \delta t = 0,$$

che si ottiene dopo la trasformazione, fornisce ancora un integrale dell'equazione (14); è chiaro pertanto che ove l'espressione

$$\pi \frac{\partial f}{\partial u} + \tilde{\omega} \frac{\partial f}{\partial v}$$

debba fornire ancora una forma dell'integrale dell'equazione differenziale data, deve essere soddisfatta una qualche condizione, così p. es. se la (14) ha la forma semplice:

$$\frac{du}{U} = \frac{dv}{V},$$

dove U, V sono funzioni di u, v, la condizione a soddisfarsi è:

$$\frac{U\frac{\partial \pi}{\partial u} + V\frac{\partial \pi}{\partial v} - \pi\frac{\partial U}{\partial u} - \tilde{\omega}\frac{\partial U}{\partial v}}{U} = \frac{U\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial u} + V\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial v} - \pi\frac{\partial V}{\partial u} - \tilde{\omega}\frac{\partial V}{\partial v}}{V}$$

che si può mettere sotto la forma:

$$\frac{\partial \dfrac{U}{U\tilde{\omega} - V\pi}}{\partial u} + \frac{\partial \dfrac{V}{U\tilde{\omega} - V\pi}}{\partial v} = 0.$$

5. Ora è noto che le geodetiche di una superficie sono curve integrali dell'equazione differenziale del 2° ordine

$$(15) \qquad 2(EG - F^2)(du\, d^2v - dv\, d^2u)$$
$$= \left(E \frac{\partial E}{\partial v} + F\frac{\partial E}{\partial u} - 2E \frac{\partial F}{\partial u}\right) du^3$$
$$+ \left(3F \frac{\partial E}{\partial v} + G\frac{\partial E}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial u} - 2E \frac{\partial G}{\partial u}\right) du^2 dv$$
$$- \left(3F \frac{\partial G}{\partial u} + E\frac{\partial G}{\partial v} - 2F \frac{\partial F}{\partial v} - 2G \frac{\partial E}{\partial v}\right) du\, dv^2$$
$$- \left(G \frac{\partial G}{\partial u} + F \frac{\partial G}{\partial v} - 2G \frac{\partial F}{\partial v}\right) dv^3,$$

supponendo quindi, che per uno scorrimento infinitesimale, rappresentato dalle (13), della superficie sopra se stessa, venga una sua curva geodetica a coincidere con la geodetica ad essa infinitamente vicina, si dirà che l'equazione differenziale (15), o ancora la famiglia di geodetiche da essa rappresentata, ammette la trasformazione infinitesimale (13).

Frattanto intendansi riferiti i punti della superficie ad un sistema di *coordinate simmetriche* u_1, v_1, allora l'elemento lineare della superficie si presenta della forma:

$$ds^2 = f_1(u_1, v_1) du_1 dv_1 \tag{16}$$

e la (15) diventa semplicemente, poichè $E_1 = G_1 = 0$,

$$F_1(du_1 d^2v_1 - dv_1 d^2u_1) = \frac{\partial F_1}{\partial u_1} du_1^2 dv_1 - \frac{\partial F_1}{\partial v_1} du_1 dv_1^2 .$$

In tal caso il sig. Lie dice che una superficie è:

della I classe quando le geodetiche di essa ammettono la trasformazione infinitesimale:

$$\delta u_1 = \pi(u_1)\delta t, \qquad \delta v_1 = \tilde{\omega}(v_1)\,\delta t,$$

della II classe quando le geodetiche di essa ammettono la trasformazione infinitesimale:

$$\delta u_1 = \pi(u_1)\delta t,\ \delta v_1 = \tilde{\omega}(u_1, v_1)\delta t;\ \text{ovvero}\ \delta u_1 = \pi(u_1, v_1)\delta t,\ \delta v_1 = \tilde{\omega}(v_1)\delta t,$$

della III classe quando le sue geodetiche ammettono la trasformazione infinitesimale:

$$\delta u_1 = \pi(u_1, v_1)\delta t, \quad \delta v_1 = \tilde{\omega}(u_1, v_1)\delta t,$$

od altrimenti, riferendosi alle quantità

$$\frac{\partial \pi}{\partial v_1}, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial u_1}, \tag{17}$$

la superficie apparterrà rispettivamente alla I classe, alla II classe o alla III classe secondo che entrambe le quantità (17) sono nulle, o lo è soltanto una, o nessuna. Può una superficie appartenere contemporaneamente a due o a tutte le tre classi se le geodetiche tracciate sopra di essa ammettono nello stesso tempo le corrispondenti trasformazioni infinitesimali.

Le trasformazioni della I classe sono trasformazioni *conformi*, infatti, dicendo u_1', v_1' ciò che diventano le u_1, v_1 trasformate, si ha

$$u_1' = u_1 + \delta u_1, \qquad v_1' = v_1 + \delta v_1,$$

onde, tenendo presente le espressioni di δu_1, δv_1 per le trasformazioni della I classe, poichè d'altra parte δt non dipende dalle variabili, consegue che u_1', v_1' sono rispettivamente funzioni della sola u_1 e della sola v_1 cioè:

$$u_1' = \varphi(u_1), \qquad v_1' = \psi(v_1). \tag{18}$$

Dicasi u, v un sistema ortogonale isotermo, a parametri isometrici, tracciato sulla superficie, allora l' elemento lineare (16) verrà espresso nelle coordinate u, v se si pone

$$u_1 = u + iv, \qquad v_1 = u - iv,$$

esso diventerà quindi della forma

$$ds^2 = f(u, v)(du^2 + dv^2): \tag{19}$$

sia ancora u', v' il sistema ortogonale isotermo nel quale trasformasi il sistema di coordinate simmetriche u_1', v_1', si ha:

$$u_1' = u' + iv', \qquad v_1' = u' - iv',$$

onde dalle (18) segue:

$$u' + iv' = \varphi(u + iv), \qquad u' - iv' = \psi(u - iv)$$

cioè $u' + iv'$ è funzione analitica di $u + iv$ ed $u' - iv'$ è funzione analitica di $u - iv$, ma tanto serve a caratterizzare la rappresentazione conforme del piano delle variabili u, v su quello delle variabili u', v'.

6. Senza seguire il sig. Lie in ulteriori sviluppi, diciamo che egli nella Memoria citata studia in tutta la sua generalità il problema di determinare la forma dell'elemento lineare di quelle superficie le cui geodetiche ammettono una o più trasformazioni infinitesimali; dalle fatte determinazioni deduconsi pertanto i seguenti risultati.

Ammettono trasformazioni infinitesimali conformi le geodetiche tracciate

a) sulle superficie il cui elemento lineare è:

$$ds^2 = A(u_1) B(v_1) du_1 dv_1,$$

le quali sono superficie sviluppabili, A, B indicano funzioni qualunque del loro argomento,

b) sulle superficie il cui elemento lineare è:

$$ds^2 = e^{au_1} \Phi(u_1 - v_1) du_1 dv_1$$

dove a è una costante qualunque e Φ è funzione arbitraria di $u_1 - v_1$, in particolare per $a = 0$ si ha:

b)′ $$ds^2 = \Phi(u_1 - v_1) du_1 dv_1$$

che è l'elemento lineare di una superficie applicabile sopra una superficie di rivoluzione e le cui geodetiche comportano una trasformazione infinitesimale che non è accompagnata da stiramento alcuno,

c) sulle superficie il cui elemento lineare è:

$$ds^2 = (u_1 - v_1)^{-2} du_1 dv_1,$$

le quali sono superficie a curvatura costante,

d) sulle superficie il cui elemento lineare è:

$$ds^2 = (u_1 - v_1)^m du_1 dv_1 \qquad m, \text{ costante finita}, \neq -2$$

le quali sono le evolute (*Centraflächen*) di superficie i cui raggi di curvatura principali stanno in un rapporto costante, [i casi *b*)', *c*), *d*) distinguonsi pel fatto che in *b*)', dove Φ rappresenta una funzione qualunque di $u_1 - v_1$, le geodetiche ammettono, in generale, una sola trasformazione infinitesimale conforme, nel caso *c*) ammettono più di due trasformazioni infinitesimali conformi, ed infine nel caso *d*) ne ammettono soltanto due].

Non ammettono trasformazioni infinitesimali conformi, o l'ammettono insieme ad altre, le geodetiche tracciate

e) sulle superficie il cui elemento lineare è:

$$ds^2 = (a + u_1 v_1) du_1 dv_1 ,$$

f) sulle superficie il cui elemento lineare ha la forma osservata per la prima volta da Liouville, cioè:

$$ds^2 = [\varphi(u_1 + v_1) + \psi(u_1 - v_1)] du_1 dv_1 ,$$

nel caso *e*) al valore $a = 0$ corrispondono superficie sviluppabili appartenenti contemporaneamente alla I ed alla II classe; al valore $a = 1$ corrisponde una famiglia di superficie reali appartenente alla II classe solamente; per ogni altro valore di a ottengonsi famiglie di superficie appartenenti contemporaneamente alla I, alla II ed alla III classe;

nel caso *f*) si hanno superficie appartenenti o alla III classe solamente come p. es. quelle il cui elemento lineare ha la forma:

$$ds^2 = \left[\frac{1}{\cos^2(u_1 + v_1)} - \frac{1}{\cos^2(u_1 - v_1)} \right] du_1 dv_1 ,$$

ovvero alla III classe ed alla I, o alla II, contemporaneamente, e tra queste ve ne ha appartenenti in più di un modo alla III classe come quelle il cui elemento lineare ha la forma:

$$ds^2 = \left[\frac{A}{(u_1 + v_1)^2} + \frac{B}{(u_1 - v_1)^2} \right] du_1 dv_1 \qquad A, B \text{ costanti},$$

le quali vi appartengono in doppio modo.

III.

7. Superficie sviluppabili. — Scriviamo le equazioni di una retta dello spazio, riferita ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, esprimendo le coordinate x, y, z di ciascun punto della retta in funzione di un parametro u, si hanno così le

$$(20)\quad x = V_1 u + W_1, \quad y = V_2 u + W_2, \quad z = V_3 u + W_3.$$

Se ora le V_i, W_i sono funzioni date di altro parametro v, le equazioni (20) rappresentano una superficie rigata i cui punti vengono riferiti al sistema di coordinate curvilinee u, v tracciato sulla superficie; le curve $v =$ cost. sono evidentemente le generatrici stesse della superficie; suppongasi inoltre che le curve $u =$ cost. siano trajettorie ortogonali delle generatrici e che il parametro u indichi una lunghezza portata sopra ciascuna generatrice a partire dalla curva fissa $u = 0$, allora, dicendo V'_i, W'_i le derivate delle funzioni V_i, W_i rispetto a v, ed osservando che in causa della natura del sistema di coordinate scelto deve aversi $E = 1$, $F = 0$, si trova

$$\sum V_i V_i = 1, \qquad \sum V_i W'_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Se inoltre le V'_i, W'_i sono tali da soddisfare alle relazioni

$$\frac{V'_1}{W'_1} = \frac{V'_2}{W'_2} = \frac{V'_3}{W'_3} = -\frac{1}{\nu}$$

la superficie è sviluppabile e si ha:

$$\left.\begin{aligned} \sum V'_i W'_i &= -\nu \sum V'_i V'_i, \\ \sum W'_i W'_i &= \nu^2 \sum V'_i V'_i, \end{aligned}\right\} \qquad i = 1, 2, 3,$$

onde l'elemento lineare di essa è:

$$ds^2 = du^2 + (u - \nu)^2 \sum V'_i V'_i dv^2$$

la qual forma dell'elemento lineare mostra che le $v =$ cost. sono geodetiche della superficie. Scrivendo nelle V'_i invece di v una certa funzione di v, $\varphi(v)$, si può con una semplice quadratura determinare $\varphi(v)$ in modo da essere soddisfatta la

$$\sum V'_i V'_i = 1$$

basta perciò porre

$$v = \int \sqrt{\Sigma V'_i V'_i}\, d\varphi ,$$

allora l'elemento lineare della superficie prende la forma:

$$ds^2 = du^2 + (u - v)^2 dv^2 .$$

Osservando che il 2° membro di questa espressione si può scrivere

$$[du + i(u - v)dv][du - i(u - v)dv] ,$$

cerchiamo un fattore integrante della equazione del 1° ordine

$$(21) \qquad du + i(u - v)dv = 0.$$

L'equazione differenziale (21) ammette la trasformazione infinitesimale

$$\delta u = \pi \delta t , \qquad \delta v = \bar{\omega} \delta t$$

se π, $\bar{\omega}$ sono funzioni di u e di v soddisfacenti alla condizione

$$\frac{\partial \dfrac{u - v}{i(u - v)\bar{\omega} + \pi}}{\partial u} + i \frac{\partial \dfrac{1}{i(u - v)\bar{\omega} + \pi}}{\partial v} = 0$$

cioè alla

$$(22) \quad \frac{1}{i(u-v)\bar{\omega}+\pi} + (u-v)\frac{\partial \dfrac{1}{i(u-v)\bar{\omega}+\pi}}{\partial u} + i \frac{\partial \dfrac{1}{i(u-v)\bar{\omega}+\pi}}{\partial v} = 0.$$

Pongasi

$$\pi = \frac{1}{\psi(v)} - \chi(v), \qquad \tilde{\omega} = \frac{\chi(v)}{i(u - v)}$$

allora la (22) diventa

$$\psi(v) + i\frac{d\psi(v)}{dv} = 0,$$

onde integrando

$$\psi(v) = e^{iv},$$

cioè l'equazione differenziale (21) ammette la trasformazione infinitesimale

$$\delta u = [e^{-iv} - \chi(v)]\,\delta t$$

$$\delta v = \frac{\chi(v)}{i(u - v)}\,\delta t$$

ed il corrispondente fattore integrante è e^{iv}, quindi e^{-iv} è il fattore integrante della

$$du - i(u - v)dv = 0.$$

Volendo ora riferire i punti della superficie ad un sistema di coordinate simmetriche u_1, v_1 si porrà

$$(23) \qquad \begin{cases} A(u_1)du_1 = [du + i(u - v)dv]e^{iv} \\ B(v_1)dv_1 = [du - i(u - v)dv]e^{-iv}, \end{cases}$$

in virtù delle quali l'elemento lineare della superficie prende la forma data sopra (6, a) cioè

$$ds^2 = A(u_1)B(v_1)du_1\,dv_1$$

e le relazioni tra le coordinate u, v ed u_1, v_1 si ottengono integrando le (23); esse sono quindi

$$\int A\,du_1 = ue^{iv} - i\int ve^{iv}dv$$

$$\int B dv_1 = u e^{-iv} + i \int v e^{-iv} dv.$$

L'equazione (9) da doversi integrare è nel caso in esame,

$$\frac{4}{A.B} \frac{\partial \theta}{\partial u_1} \frac{\partial \theta}{\partial v_1} - 1 = 0,$$

ed il sistema di equazioni differenziali ordinarie che ad essa corrisponde è:

$$\frac{dp}{\frac{A'}{A} pq} = \frac{dq}{\frac{B'}{B} pq} = \frac{du_1}{q} = \frac{dv_1}{p}$$

dove $p = \frac{\partial \theta}{\partial u_1}$, $q = \frac{\partial \theta}{\partial v_1}$, si trova facilmente

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_1} = \frac{a}{2} A, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial v_1} = \frac{B}{2a}, \qquad a, \text{ costante arbitraria}$$

e però l'equazione delle curve parallele della superficie, espressa nelle coordinate u_1, v_1, è

$$\theta = \frac{a}{2} \int A du_1 + \frac{1}{2a} \int B dv_1 = \text{cost.}$$

Nel sistema di coordinate u, v, in virtù della nota relazione

$$e^{\pm iv} = \cos v \pm i \operatorname{sen} v,$$

la stessa equazione diventa:

$$\theta = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\left[u \cos v + \int v \operatorname{sen} v dv\right] + \frac{i}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\left[u \operatorname{sen} v - \int v \cos v dv\right] = \text{cost.}$$

Pongasi

$$a + \frac{1}{a} = 2k, \quad \text{segue} \quad a - \frac{1}{a} = 2i\sqrt{1 - k^2}$$

ed affinchè l'elemento lineare $d\theta$ di una certa geodetica sia reale la costante k deve scegliersi in modo da aversi $1 - k^2 > 0$, si può quindi porre $k = \cos\alpha$ e l'equazione delle curve parallele diventa

$$\theta = u\cos(v + \alpha) + \int v \operatorname{sen}(v + \alpha)\, dv = \text{cost.}$$

dove la costante α può essere positiva o negativa.

Pertanto l'equazione delle geodetiche è:

$$\theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = a'$$

cioè

$$u \operatorname{sen}(v + \alpha) - \int v \cos(v + \alpha)\, dv = a'.$$

Se ω è l'angolo che fa nel punto (u, v) la geodetica (α, a') data sulla superficie con la generatrice passante per quel punto, si trova

$$\operatorname{tang}\omega + \operatorname{tang}(v + \alpha) = 0.$$

Come esempi di superficie sviluppabili considereremo le superficie coniche e le superficie cilindriche.

Superficie coniche. — Supponendo che il vertice della superficie sia l'origine delle coordinate cartesiane, detto v l'angolo che una generatrice fa con l'asse delle z e w l'angolo che un piano passante per lo stesso asse fa col piano zx, l'equazione $v = \text{cost.}$, per un valore assegnato alla costante, rappresenterà *una* generatrice della superficie alloraquando w sia funzione data di v, in tal caso risolvendo l'equazione $w = \text{cost.}$ si otterranno tutte le intersezioni, reali o imaginarie, del piano considerato con la superficie; pertanto le equazioni della superficie sono:

$$x = u \operatorname{sen} v \cos w, \qquad y = u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w, \qquad z = u\cos v$$

dove u indica un segmento di generatrice misurato a partire dal vertice, il sistema di coordinate curvilinee sulla superficie è formato dalle generatrici $v = \text{cost.}$ e dalle intersezioni $u = \text{cost.}$ di sfere aventi i centri

nel vertice del cono con la superficie data. L'elemento lineare della superficie ha la forma:

$$ds^2 = du^2 + \left[1 + \operatorname{sen}^2 v \left(\frac{dw}{dv}\right)^2\right] u^2 dv^2 ;$$

ponendo

$$\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 v \left(\frac{dw}{dv}\right)^2}\, dv = dv_1$$

esso diventa:

$$ds^2 = du^2 + u^2 dv_1^2$$

che è della forma trovata sopra ove si ponga $\nu = 0$, quindi l'equazione delle curve parallele è

$$\theta = u \cos(v_1 + \alpha) = \text{cost.}$$

e quella delle geodetiche è

$$u \operatorname{sen}(v_1 + \alpha) = a' ;$$

ponendo in quest'ultima per v_1 la sua espressione in funzione di v essa diventa:

$$u \operatorname{sen}\left[\int \sqrt{dv^2 + \operatorname{sen}^2 v\, dw^2} + \alpha\right] = a'.$$

Se ω è l'angolo fatto dalla geodetica (α, a') nel punto (u, v) con la generatrice che ivi passa si ha:

$$\operatorname{tang} \omega + \operatorname{tang}\left[\int \sqrt{dv^2 + \operatorname{sen}^2 v\, dw^2} + \alpha\right] = 0.$$

Pel cono di rotazione l'angolo v ha un valore costante β quindi $dv = 0$ e però si ha:

equazione delle geodetiche $\quad u \operatorname{sen}(w \operatorname{sen}\beta + \alpha) = a'$

angolo ω $\quad \operatorname{tang}\omega + \operatorname{tang}(w \operatorname{sen}\beta + \alpha) = 0.$

Superficie cilindriche. — Data una superficie cilindrica si può sempre supporre che le generatrici della stessa fossero parallele all'asse delle x di un sistema cartesiano-ortogonale, onde, se $z = F(y)$ è l'equazione della traccia del cilindro sul piano yz, indicando con u una lunghezza contata sulle generatrici a partire dal piano yz e con v la distanza di un punto della traccia dall'asse delle z, la superficie verrà rappresentata dalle equazioni

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = F(v).$$

Le curve $v = \text{cost.}$ sono generatrici della superficie ottenute per mezzo dell'intersezione dei piani $y = \text{cost.}$, $z = \text{cost.}$; le curve $u = \text{cost.}$ sono trajettorie ortogonali delle generatrici cioè sezioni rette della superficie. L'elemento lineare, come è facile verificare, ha la forma:

$$ds^2 = du^2 + \left[1 + \left(\frac{dF}{dv}\right)^2\right] dv^2$$

cioè:

$$ds^2 = du^2 + dv'^2$$

ove si è posto

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dF}{dv}\right)^2}\, dv = dv'.$$

Scrivendo

$$du + i\,dv' = du_1, \qquad du - i\,dv' = dv_1$$

si trova

$$ds^2 = du_1 dv_1 .$$

Pertanto l'equazione che devesi integrare è la

$$4\frac{\partial\theta}{\partial u_1}\frac{\partial\theta}{\partial v_1} - 1 = 0,$$

eseguendo l'integrazione trovasi facilmente

$$\frac{\partial\theta}{\partial u_1} = \frac{a}{2}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v_1} = \frac{1}{2a};$$

segue quindi che l'equazione delle curve parallele espressa nelle coordinate u, v' è

$$\theta = ku - \sqrt{1-k^2}\, v' = \text{cost.},$$

dovendo però l'arco di geodetica essere reale si porrà $k = \cos\alpha$ onde si ha

$$\theta = u\cos\alpha - v'\operatorname{sen}\alpha = \text{cost.}$$

e però l'equazione delle geodetiche nelle primitive coordinate è:

$$u\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha \int \sqrt{1 + \left(\frac{dF}{dv}\right)^2}\, dv = a'.$$

Riguardo all'angolo ω fatto nel punto (u, v) dalla geodetica (α, a') con la generatrice che passa per quel punto si trova:

$$\operatorname{tang}\omega + \operatorname{tang}\alpha = 0.$$

8. Superficie di rivoluzione. — L'asse z di un sistema cartesiano-ortogonale sia l'asse della superficie, dicasi u la distanza di un punto del meridiano dall'asse e v l'angolo che il piano del meridiano fa col piano zx, allora le equazioni della superficie sono

$$x = u\cos v, \qquad y = u\operatorname{sen} v, \qquad z = F(u).$$

Le curve $u = \text{cost.}$ sono i paralleli della superficie e le curve $v = \text{cost.}$ ne sono i meridiani. L'elemento lineare è espresso dalla:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2\right] du^2 + u^2 dv^2.$$

Pongasi:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2}\, du = du'$$

allora sarà u^2 funzione di u' cioè $u^2 = \varphi(u')$ e l'elemento lineare prende la forma

$$ds^2 = du'^2 + \varphi(u')dv^2.$$

Sia (u_1, v_1) un sistema di coordinate simmetriche; si trasformeranno le coordinate u', v nelle u_1, v_1 mercè le relazioni:

$$
(24) \qquad \begin{aligned}
&\frac{1}{2i\sqrt{\varphi}}[\sqrt{\varphi}\,dv + i\,du'] = du_1, \\
&\frac{1}{2i\sqrt{\varphi}}[\sqrt{\varphi}\,dv - i\,du'] = dv_1,
\end{aligned}
$$

dalle quali si trova senza difficoltà:

$$
\frac{du'}{\sqrt{\varphi}} = d(u_1 - v_1), \quad \text{onde integrando} \quad u_1 - v_1 = \int \frac{du'}{\sqrt{\varphi}},
$$

inoltre, poichè u' è funzione di $u_1 - v_1$, si ha:

$$
ds^2 = -4\varphi\,du_1\,dv_1 = \Phi(u_1 - v_1)\,du_1\,dv_1,
$$

che è una delle forme dell'elemento lineare di una superficie già considerate dal sig. Lie. Pertanto l'equazione (9) diventa la

$$
\frac{4}{\Phi(u_1 - v_1)} \frac{\partial\theta}{\partial u_1} \frac{\partial\theta}{\partial v_1} - 1 = 0,
$$

procedendo all'integrazione di questa equazione col metodo sopra adoperato si trova:

$$
\frac{\partial\theta}{\partial u_1} + \frac{\partial\theta}{\partial v_1} = 2a, \qquad \text{inoltre} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial u_1}\frac{\partial\theta}{\partial v_1} = \frac{\Phi}{4}
$$

e però:

$$
\frac{\partial\theta}{\partial u_1} = a + \sqrt{a^2 - \frac{\Phi}{4}}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v_1} = a - \sqrt{a^2 - \frac{\Phi}{4}}
$$

quindi l'equazione delle curve parallele è la

$$
\theta = a(u_1 + v_1) + \int \sqrt{a^2 - \frac{\Phi}{4}}\, d(u_1 - v_1) = \text{cost.}
$$

Ora dalle (24) si ha $d(u_1 + v_1) = \frac{dv}{i}$ cioè $u_1 + v_1 = \frac{v}{i}$ e per la realtà dell'arco θ dovendo supporre la costante a puramente imaginaria, si trova facilmente per l'equazione delle curve parallele, nelle primitive coordinate u, v:

$$(25) \qquad \theta = av + \int \sqrt{1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2} \cdot \sqrt{u^2 - a^2}\,\frac{du}{u} = \text{cost.}$$

e per l'equazione delle geodetiche:

$$(26) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial a} = v - a \int \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2}}{\sqrt{u^2 - a^2}}\,\frac{du}{u} = a'.$$

Infine pel solito angolo ω fatto dalla geodetica (a, a') con una linea $v = \text{cost.}$ si trova:

$$\text{tang}\,\omega = \frac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

ed ancora

$$\text{sen}\,\omega = \frac{a}{u}$$

la quale ultima relazione contiene un noto teorema di Clairaut.

Alisseide. — Fra le superficie di rivoluzione, a parte quelle del 2° ordine per le quali le ricerche riguardanti le loro geodetiche trovano compiuto svolgimento nella bella analisi che ne fa il sig. Halphen nel t. II, dell'opera di lui, *Traité des fonctions elliptiques* ecc., merita poi speciale menzione quella generata dalla rotazione di una *catenaria* attorno alla sua base, che è pure l'asse z di un sistema cartesiano-ortogonale; siffatta superficie vien detta perciò *catenoide* ed anche *alisseide*, essa è l'unica superficie *ad area minima*, o semplicemente *superficie minima*, di rivoluzione, vale a dire superficie tale che in ciascun punto della stessa i raggi principali di curvatura sono eguali e di segno contrario. Chiamando u la distanza di un punto del meridiano dall'asse, l'equazione della catenaria è:

$$(27) \qquad u = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{z}{b}} + e^{-\frac{z}{b}}\right);$$

da questa e dalla identità $e^{\frac{z}{b}} . e^{-\frac{z}{b}} = 1$ si trova

$$e^{\frac{z}{b}} = \frac{u + \sqrt{u^2 - b^2}}{b} \qquad e^{-\frac{z}{b}} = \frac{u - \sqrt{u^2 - b^2}}{b}$$

onde

$$e^{\frac{z}{b}} - e^{-\frac{z}{b}} = \frac{2\sqrt{u^2 - b^2}}{b}.$$

Derivando la (27) rispetto ad u, fatto $z = F(u)$, si ottiene:

$$1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2 = \frac{u^2}{u^2 - b^2}$$

da cui, introducendo una nuova variabile u',

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2}\, du = \frac{u\,du}{\sqrt{u^2 - b^2}} = du'$$

ed integrando si ha:

$$u^2 = u'^2 + b^2,$$

e però la forma dell'elemento lineare della superficie è:

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 - b^2} du^2 + u^2 dv^2 = du'^2 + (u'^2 + b^2) dv^2.$$

Tenuta presente l'equazione trovata (26) e facendo le opportune sostituzioni, tutte le possibili geodetiche della superficie vengono rappresentate dalla

$$v - a \int \frac{du}{\sqrt{(u^2 - a^2)(u^2 - b^2)}} = a',$$

e le loro trajettorie ortogonali, avuto riguardo alla (25), dalla

$$\theta = va + \int \frac{(u^2 - a^2)\, du}{\sqrt{(u^2 - a^2)(u^2 - b^2)}} = \text{cost.}$$

Gl'integrali che entrano nelle due ultime equazioni essendo ellittici, l'integrazione può avere effetto per funzioni ellittiche, a tal uopo osserviamo che il polinomio il quale trovasi sottoposto al segno radicale si riduce del 3° grado ponendo $u^2 = t$, e poichè così facendo le radici del polinomio risultante sono o, a^2, b^2, facendo la sostituzione

$$u^2 = \wp u + \frac{a^2 + b^2}{3} = \wp u - e_\gamma, \text{ (*)}$$

si ottiene un polinomio del 3° grado in $\wp u$ il quale, a meno del fattore 4, coincide con $\wp'^2 u$, si hanno pertanto le relazioni:

$$u^2 - a^2 = \wp u + \frac{b^2 - 2a^2}{3} = \wp u - e_\alpha,$$

$$u^2 - b^2 = \wp u + \frac{a^2 - 2b^2}{3} = \wp u - e_\beta,$$

$$2\,u\,du = \wp' u\,du,$$

onde, sostituendo ed integrando, si trova per l'equazione delle curve parallele dell'alisseide:

$$\theta = av - \zeta(u) - e_\alpha u = \text{cost.}$$

e per l'equazione delle sue geodetiche:

$$v - a u = a',$$

a, a' sono costanti arbitrarie ed e_α è funzione di a. Nelle nuove quantità l'elemento lineare viene espresso dalla:

$$ds^2 = (\wp u - e_\alpha)(\wp u - e_\gamma)du^2 + (\wp u - e_\gamma)dv^2$$

(*) Per le formule, qui ed in seguito adoperate, riguardanti funzioni ellittiche, veggasi il t. I dell'interessante opera del sig. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.* La funzione $\zeta(u)$ coincide con la funzione $\zeta(u)$ studiata dal sudetto Autore nell'opera citata.

e l'angolo ω formato nel punto (u, v) dalla geodetica (a, a') e dalla curva $v = \text{cost.}$ passanti per quel punto è dato dalla:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{a}{\sqrt{\wp u - e_2}}.$$

Se $v = \text{cost.}$ è una curva reale, per assicurare la realtà della geodetica e del suo arco deve essere

$$a^2 < b^2 < u^2 \qquad \text{ovvero} \qquad b^2 < a^2 < u^2.$$

Superficie a curvatura costante. — Fra le superficie di rivoluzione occorre considerarne ancora talune le quali sono a curvatura costante, positiva o negativa. Indichisi, come è solito farsi, con K la quantità che serve a misurare la curvatura totale di una superficie in un suo punto, supposto l'elemento lineare della superficie espresso in un sistema di coordinate simmetriche per mezzo della

$$ds^2 = 2 F_1 du_1 dv_1,$$

la quantità K vien data dalla formula

$$K = -\frac{1}{F_1} \frac{\partial^2 \log F_1}{\partial u_1 \partial v_1} \tag{28}$$

la quale facilmente si trae dalla formula generale facendovi $E_1 = G_1 = 0$ (*). Ora supponghiamo che l'elemento lineare della superficie scritto in una forma analoga ad altra determinata dal sig. Lie, ma più generale, sia

$$ds^2 = \pm 4 b^2 (u_1 - v_1)^m du_1 dv_1;$$

(*) Cfr. in proposito Bianchi, l. c. pag. 135 ed anche Joachimsthal, *Anwendung der Diff.-u. Integralrechnung*, ecc. 2. Auflage, 1881, pag. 103.

facendo uso della (28), pel valore di K si trova

$$K = \mp \frac{m}{2b^2(u_1 - v_1)^{m+2}}$$

ove i segni si corrispondono. Pertanto K sarà costante cioè indipendente da u_1, v_1 quando $m + 2 = 0$ cioè quando $m = -2$, allora è

$$K = \pm \frac{1}{b^2}$$

e' propriamente

$$K = + \frac{1}{b^2} \qquad \text{se} \qquad ds^2 = + 4b^2(u_1 - v_1)^{-2} du_1 dv_1 ,$$

$$K = - \frac{1}{b^2} \qquad \text{se} \qquad ds^2 = - 4b^2(u_1 - v_1)^{-2} du_1 dv_1 ,$$

nel primo di questi casi è in particolare $K = + 4$ se

$$ds^2 = (u_1 - v_1)^{-2} du_1 dv_1$$

la quale forma dell'elemento lineare apparisce tra quelle determinate dal sig. Lie.

Lasciando per ora da parte il caso delle superficie a curvatura costante positiva, fermiamoci a considerare quello delle superficie a curvatura costante negativa. Per queste superficie adunque l'elemento lineare è:

$$ds^2 = - \frac{4b^2}{(u_1 - v_1)^2} du_1 dv_1$$

cioè della forma

$$ds^2 = \Phi(u_1 - v_1) du_1 dv_1 . \tag{29}$$

Intanto ponendo

$$2b\,du_1 = dv'' + i\,du'' , \qquad 2b\,dv_1 = dv'' - i\,du''$$

si trova

$$4b^2 du_1 dv_1 = du''^2 + dv''^2 , \qquad -b^2(u_1 - v_1)^2 = u''^2 ,$$

e però:

$$ds^2 = \frac{b^2(du''^2 + dv''^2)}{u''^2},$$

pongasi

$$\frac{du''}{u''} = -du, \qquad dv'' = dv,$$

si ha

$$ds^2 = b^2(du^2 + e^{2u} dv^2).$$

Se si pone in questa

$$b\,du = du', \quad b\,dv = dv'$$

si ha

$$(30) \qquad ds^2 = du'^2 + e^{2\frac{u'}{b}} dv'^2.$$

Le forme (29), (30) dell'elemento lineare, paragonate con quelle trovate a pag. 23, 24, mostrano, che la superficie considerata potrebbe essere applicabile sopra superficie di rivoluzione, essa per vero è la superficie generata dall'evolvente della catenaria (27) che ruota attorno al suo asintoto il quale coincide con la base della catenaria, siffatta curva si chiama *trattrice*, essa gode della proprietà che la porzione di tangente in un punto della curva, compresa fra il punto di contatto e l'asintoto, è costante per ogni punto della curva, ed eguale al parametro b della catenaria, dicesi perciò anche *curva dalle tangenti eguali*. Come la sfera è la più semplice forma di superficie a curvatura costante positiva, così la superficie che qui si considera è la più elementare tra quelle a curvatura costante negativa e prende il nome di *pseudosfera*. Essa appartiene al tipo di superficie pseudosferiche detto *parabolico*, vi hanno altri due tipi di siffatte superficie, cioè le superficie di tipo *ellittico* il cui elemento lineare ha la forma:

$$ds^2 = b^2\left[du^2 + \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 dv^2\right],$$

le superficie di tipo *iperbolico* il cui elemento lineare ha la forma

$$ds^2 = b^2\left[du^2 + \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 dv^2\right].$$

Per ulteriori particolari riguardanti le superficie pseudosferiche ve gasi il corso di *Geometria differenziale* del prof. Bianchi non che l'op ra più volte citata del sig. Darboux.

Frattanto, facendo uso di formole trovate per le superficie di rc tazione si ottiene senza difficoltà l'equazione in termini finiti delle curv parallele tracciate sulla pseudosfera ed anche l'equazione delle sue geo detiche, esse sono:

curve parallele: $\theta = av + \int \frac{1}{e^u}\sqrt{b^2 e^{2u} - a^2}\, du = \text{cost.}$

curve geodetiche: $v - a \int \frac{du}{e^u \sqrt{b^2 e^{2u} - a^2}} = a'.$

Eseguendo le integrazioni si trova:

$$\theta = av + b \log \{b e^u + \sqrt{b^2 e^{2u} - a^2}\} - \frac{1}{e^u}\sqrt{b^2 e^{2u} - a^2} = \text{cost.}$$

$$v - \frac{1}{a e^u}\sqrt{b^2 e^{2u} - a^2} = a'.$$

In modo analogo si possono trattare gli altri due tipi di super ficie pseudosferiche; ponendo poi

$$\text{sen}^2 iu = t, \qquad \text{o pure} \qquad \cos^2 iu = t$$

si perviene in entrambi i casi ad integrali della forma

$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + bt + c}}, \quad \int \frac{dt}{t\sqrt{at^2 + bt + c}}.$$

9. Elicoidi. — Una superficie elicoide deve intendersi generata d moto elicoidale di una curva attorno ad un asse, vale a dire da un curva i cui punti s'imaginano legati ad un punto mobile sopra di un'elic tracciata sulla superficie di un cilindro di rotazione avente per ass

quello dell'elicoide. Chiamando adunque *meridiano* o *profilo meridiano* la curva intersezione della superficie con un piano passante per l'asse, in un certo istante del movimento, può intendersi generata l'elicoide col moto elicoidale del suo profilo, ed allora mantenendo le notazioni adoperate nel caso delle superficie di rivoluzione, indicando con h il passo ridotto dell'elicoide, vale a dire il rapporto tra la velocità del moto di traslazione e quella del moto di rotazione, le equazioni della superficie sono:

$$x = u \cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = F(u) + hv.$$

L'elemento lineare di essa presentasi della forma:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2\right] du^2 + 2h\frac{dF}{du} du\, dv + (u^2 + h^2) dv^2,$$

ovvero ponendo:

$$\sqrt{1 + \frac{u^2}{u^2 + h^2}\left(\frac{dF}{du}\right)^2}\, du = du', \qquad dv + \frac{h}{u^2 + h^2}\frac{dF}{du} du = dv',$$

poichè allora $u^2 + h^2 = \varphi(u')$, si ha:

$$ds^2 = du'^2 + \varphi(u') dv'^2$$

che è la forma dell'elemento lineare delle superficie di rivoluzione, è noto infatti che le elicoidi sono superficie applicabili sopra quelle. È facile ricavare le espressioni di u, v, $F(u)$ per le u', v', veggasi in proposito il t. I dell'opera citata di Darboux, pag. 91. Servendosi delle formule trovate pel caso delle superficie di rivoluzione e facendo le opportune sostituzioni si trovano facilmente le equazioni delle geodetiche tracciate sulla superficie e delle loro trajettorie ortogonali, equazioni che per brevità si tralasciano di scrivere.

Se $z =$ cost. per tutti i punti del profilo meridiano, allora l'elicoide generata è l'*elicoide gobba a piano direttore*, in tal caso è $\frac{dF}{du} = 0$, posto $h = b$ si trova:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + b^2)\, dv^2$$

che è la forma dell'elemento lineare dell'alisseide, cioè l'elicoide gobba a piano direttore è applicabile sull'alisseide, dicesi perciò anche *elicoide rigata ad area minima.*

10. Paraboloide. — È noto che per ogni punto dello spazio passano tre paraboloidi confocali, di cui due sono paraboloidi ellittici ed il terzo è un paraboloide iperbolico, le loro equazioni sono:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+2z=0,$$

$$(31)\qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+2z+\lambda=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+2z+\mu=0.$$

Risolvendo queste equazioni rispetto ad x, y, z si trova

$$x^2=-\frac{a^2(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}{a^2-b^2}$$

$$y^2=-\frac{b^2(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}{b^2-a^2}$$

$$2z=(a^2+b^2)-(\lambda+\mu)$$

Le equazioni $\lambda=\text{cost.}$, $\mu=\text{cost}$ rappresentano due sistemi di curve tracciate sulla superficie la cui equazione è la prima delle (31), e propriamente rappresentano le linee di curvatura di questa superficie.

Calcolando i coefficienti che entrano nell'espressione dell'elemento lineare della superficie si trova:

$$4E=\frac{\lambda(\lambda-\mu)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)},\quad F=0,\quad 4G=\frac{\mu(\mu-\lambda)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)},$$

onde l'elemento lineare della superficie ha la forma:

$$ds^2=\frac{\lambda-\mu}{4}\left[\frac{\lambda}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}d\lambda^2-\frac{\mu}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)}d\mu^2\right].$$

Posto

$$\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}=d\alpha\,,\qquad \frac{\sqrt{-\mu}\,d\mu}{\sqrt{(a^2-\mu)(b^2-\mu)}}=d\beta\,,$$

l'espressione dell'elemento lineare diventa della forma

$$ds^2=[\varphi(\alpha)+\psi(\beta)](d\alpha^2+d\beta^2)$$

che è quella considerata da Liouville.

Pertanto nel caso in esame l'equazione differenziale $\Delta\theta=1$ è:

$$\frac{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}{\lambda}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2-\frac{\lambda}{4}=\frac{(a^2-\mu)(b^2-\mu)}{\mu}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2-\frac{\mu}{4}\,.$$

Adoperando i procedimenti soliti per venire alla sua integrazione, si trova:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2=\frac{\lambda(c^2+\lambda)}{4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}\,,\quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2=\frac{\mu(c^2+\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)}\,.$$

Perciò l'equazione in termini finiti delle curve parallele tracciate sulla superficie è la:

$$(32)\qquad \begin{aligned}\theta=&\int\frac{\lambda(c^2+\lambda)}{\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2+\lambda)}}\,d\lambda\\ &\pm\int\frac{\mu(c^2+\mu)}{\sqrt{\mu(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2+\mu)}}=\text{cost.}\end{aligned}$$

e quella delle geodetiche, loro trajettorie ortogonali, è la $\frac{\partial\theta}{\partial c^2}=c'$, cioè la:

$$(33)\quad \int\frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2+\lambda)}}\pm\int\frac{\mu\,d\mu}{\sqrt{\mu(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2+\mu)}}=c'.$$

Gl'integrali contenuti in queste equazioni sono ellittici, eseguiremo quindi le integrazioni indicate per mezzo delle funzioni ellittiche.

A tale uopo si ponga

$$\lambda = \frac{\tau^2}{pu - pw},$$

$$a^2 - \lambda = \frac{\tau^2(pu - e_\alpha)}{(e_\alpha - pw)(pu - pw)}, \quad b^2 - \lambda = \frac{\tau^2(pu - e_\beta)}{(e_\beta - pw)(pu - pw)},$$

$$c^2 + \lambda = \frac{\tau^2(pu - e_\gamma)}{(pw - e_\gamma)(pu - pw)},$$

da esse relazioni si trae

$$a^2 = \frac{\tau^2}{e_\alpha - pw}, \quad b^2 = \frac{\tau^2}{e_\beta - pw}, \quad c^2 = \frac{\tau^2}{pw - e_\gamma},$$

$$a^2 - b^2 = \frac{\tau^2(e_\beta - e_\alpha)}{(e_\beta - pw)(e_\alpha - pw)},$$

in queste formule τ^2 è un fattore costante, pu, pw sono funzioni degli argomenti u, w; e_α, e_β, e_γ sono le radici della equazione di 3° grado:

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0.$$

Dicasi R il polinomio di 4° grado in λ contenuto nei denominatori delle (32), (33), conoscendo le radici della equazione $R = 0$, prendendole in ordine crescente o decrescente che sia, sarà noto il valore del loro rapporto doppio vale a dire l'invariante assoluto $\frac{g_2^3}{g_3^2}$ o il *modulo k* delle funzioni ellittiche che si adoperano; inoltre la relazione

$$\frac{a^2}{a^2 - b^2} = \frac{pw - e_\beta}{e_\alpha - e_\beta}$$

permette di determinare w.

Ora, sostituendo in R le nuove espressioni dei fattori che lo compongono, si ha:

$$R = \frac{\tau^8}{(\wp u - \wp w)^4} \prod_\alpha \frac{\wp u - e_\alpha}{\wp w - e_\alpha} = \frac{\tau^8}{(\wp u - \wp w)^4} \frac{\wp'^2 u}{\wp'^2 w}$$

e però

$$(34) \qquad \frac{\lambda(c^2 + \lambda)\, d\lambda}{\sqrt{R}} = \mp \frac{\tau^2 (\wp u - e_\gamma)\wp' w\, du}{(\wp w - e_\gamma)(\wp u - \wp w)^2}$$

$$(35) \qquad \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{R}} = \mp \frac{\wp' w\, du}{\wp u - \wp w},$$

ma si ha:

$$\frac{-\wp' w}{\wp u - \wp w} = \zeta(u + w) - \zeta(u - w) - 2\zeta(w)\ (^*)$$

onde

$$\frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{R}} = \pm \left[\zeta(u + w) - \zeta(u - w) - 2\zeta(w)\right] du\,;$$

inoltre si ha:

$$\frac{\wp u - e_\gamma}{(\wp u - \wp w)^2} = \frac{\wp w - e_\gamma}{(\wp u - \wp w)^2} + \frac{1}{\wp u - \wp w}$$

quindi:

$$\frac{\wp' w(\wp u - e_\gamma)\, du}{(\wp w - e_\gamma)(\wp u - \wp w)^2} = \frac{1}{\wp' w}\left[\wp(u + w) + \wp(u - w) + 2\wp w\right] du$$

$$+ \left[\frac{\wp'' w}{\wp'^2 w} - \frac{1}{\wp w - e_\gamma}\right]\left[\zeta(u + w) - \zeta(u - w) - 2\zeta(w)\right] du$$

e ponendo

$$\frac{\wp'' w(\wp w - e_\gamma) - \wp'^2 w}{\wp' w(\wp w - e_\gamma)} = r$$

si ha:

(*) Per le formule che qui abbisogna richiamare cfr. l'opera citata del sig. Halphen t. I, pag. 204, 205; la funzione ζ qui adoperata deve intendersi identica alla funzione ζ usata dal sig. Halphen.

$$\frac{\lambda(c^2+\lambda)d\lambda}{\sqrt{R}}=$$

$$\mp\frac{\tau^2}{p'u}\Big[p(u+u)+p(u-u)+2p(u)+r[\zeta(u+u)-\zeta(u-u)-2\zeta(u)]\Big]du,$$

di tal che, integrando, l'equazione delle curve parallele diventa, dopo facili trasformazioni,

$$\left[\frac{\sigma(u+u)}{\sigma(u-u)}e^{-2u\zeta(u)}\right]^r e^{-\zeta(u+u)-\zeta(u-u)+2up(u)}$$

$$\pm C\left[\frac{\sigma(v+u)}{\sigma(v-u)}e^{-2v\zeta(u)}\right]^r e^{-\zeta(v+u)-\zeta(v-u)+2vp(u)}=0$$

dove C è la costante arbitraria e v è un argomento corrispondente al parametro μ.

Pongasi

$$\frac{\sigma(u+u)}{\sigma u\,\sigma u}e^{-u\zeta(u)}=\varphi(u,\,u),\quad \frac{\sigma(u-u)}{\sigma u\,\sigma u}e^{u\zeta(u)}=-\varphi(u,-u)$$

dove $\varphi(u,\,u)$, $\varphi(u,-u)$ sono quindi funzioni di 2ª specie, allora l'equazione precedente diventa:

$$\left[\frac{\varphi(u,\,u)}{\varphi(u,-u)}\right]^r e^{-\zeta(u+u)-\zeta(u-u)+2up(u)}\pm C\left[\frac{\varphi(v,\,u)}{\varphi(v,-u)}\right]^r e^{-\zeta(v+u)-\zeta(v-u)+2vp(u)}=0.$$

Operando in modo analogo servendosi dell'espressione trovata di

$$\frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{R}},$$

per l'equazione delle geodetiche si ha:

$$\frac{\varphi(u,\,u)}{\varphi(u,-u)}\pm C_1\frac{\varphi(v,\,u)}{\varphi(v,-u)}=0.$$

Le espressioni che danno le coordinate di un punto della superficie per mezzo degli argomenti u, v sono:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{\tau_1^2}{e_\alpha-e_\beta}\cdot\frac{H}{K}\cdot\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)\sigma(u-\omega_\alpha)\sigma(v+\omega_\alpha)\sigma(v-\omega_\alpha)}{\sigma(u+w)\sigma(u-w)\sigma(v+w)\sigma(v-w)},$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{\tau_1^2}{e_\beta-e_\alpha}\cdot\frac{K}{H}\cdot\frac{\sigma(u+\omega_\beta)\sigma(u-\omega_\beta)\sigma(v+\omega_\beta)\sigma(v-\omega_\beta)}{\sigma(u+w)\sigma(u-w)\sigma(v+w)\sigma(v-w)},$$

$$2z=\tau_1^2\left[H_1\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma(u+w)\sigma(u-w)}+K_1\frac{\sigma(v+\omega_\beta)\sigma(v-\omega_\beta)}{\sigma(v+w)\sigma(v-m)}\right]$$

$$=\tau_1^2\left[H_1\frac{\sigma(v+\omega_\alpha)\sigma(v-\omega_\alpha)}{\sigma(v+w)\sigma(v-w)}+K_1\frac{\sigma(u+\omega_\beta)\sigma(u-\omega_\beta)}{\sigma(u+w)\sigma(u-w)}\right],$$

dove si è scritto:

$$\tau_1^2=\tau^2\frac{\sigma^4 w}{\sigma^2\omega_\alpha\sigma^2\omega_\beta},\quad H=\frac{1}{\sigma(w+\omega_\alpha)\sigma(w-\omega_\alpha)},\quad K=\frac{1}{\sigma(w+\omega_\beta)\sigma(w-\omega_\beta)}$$

$$H_1=H\sigma^2\omega_\alpha\sigma^2\omega_\beta,\qquad K_1=K\sigma^2\omega_\alpha\sigma^2\omega_\beta.$$

Agl'indici α, β, γ si debbono dare i valori 1, 2, 3; suppongansi, in ogni caso, le radici e_α, e_β, e_γ scritte in ordine crescente e si cerchi dentro quale de' quattro intervalli

$$(-\infty,\, e_1),\qquad (e_1,\, e_2),\qquad (e_2,\, e_3),\qquad (e_3,\, +\infty)$$

possono variare le funzioni pu, pv, pw affinchè i punti della superficie abbiano coordinate reali, ed affinchè l'arco di geodetica sia reale.

Osserviamo intanto che, in virtù delle poste relazioni, si può scrivere

$$x^2=-A^2(pw-e_\beta)(e_\alpha-e_\beta)(pu-e_\alpha)(pv-e_\alpha)(pu-pw)(pv-pw)$$

$$y^2=-B^2(pw-e_\alpha)(e_\beta-e_\alpha)(pu-e_\beta)(pv-e_\beta)(pu-pw)(pv-pw)$$

onde segue:

$$x^2 y^2 = -C^2 (p\,w\ \infty\ e_\alpha e_\beta)(p\,u\ p\,v\ e_\alpha e_\beta)$$

$$x^2 + y^2 = -(p\,w\ \infty\ p\,u\ p\,v)[A^2(p\,w - e_\beta)(e_\alpha - e_\beta)(p\,u - e_\alpha)(p\,v - e_\alpha)$$

$$+ B^2(p\,w - e_\alpha)(e_\beta - e_\alpha)(p\,u - e_\beta)(p\,v - e_\beta)];$$

per essere quindi x, y reali debbono essere x^2, y^2 positive e però i rapporti doppi $(p\,w\ \infty e_\alpha e_\beta)$, $(p\,u\ p\,v\ e_\alpha e_\beta)$ debbono avere segni contrari, inoltre per essere l'elemento di arco di geodetica reale, o $d\theta$ reale, le funzioni pu, pv, pw debbono essere comprese fra intervalli tali delle radici i cui ranghi siano della stessa parità.

Supponghiamo da prima che abbiasi

$$(p\,w\ \infty\ e_\alpha e_\beta) > 0, \qquad (p\,u\ p\,v\ e_\alpha e_\beta) < 0$$

allora pw deve essere esterna alla coppia e_α, e_β la quale poi deve separare la coppia pu, pv ed essere separata da essa, quindi qualunque sia per essere la posizione della terza radice e_γ:

	pv si troverà	nel	2°	o	nel	3°	intervallo
e però rispettiamente	pu	»	» 4°	»	»	1°	»
	pw	»	» 4°	»	»	1°	»

ma in tal caso i fattori di A^2, B^2 nella espressione che dà la somma $x^2 + y^2$ saranno entrambi negativi quindi deve essere:

$$(p\,w\ \infty\ p\,u\ p\,v) > 0$$

cioè pw esterna a pu, pv.

Sia ora

$$(p\,w\ \infty\ e_\alpha e_\beta) < 0, \qquad (p\,u\ p\,v\ e_\alpha e_\beta) > 0$$

allora pw resta compresa fra e_α, e_β e sarà nel 2° o nel 3° intarvallo;

saranno perciò pu, pv entrambe comprese nel 4° o nel 1° intervallo od anche entrambe comprese nel 2° o nel 3° intervallo insieme a pu, però è facile vedere che ora i fattori di A^2, B^2 avranno entrambi segno positivo quindi deve essere

$$(pu \infty pu\,pv) > 0$$

cioè pu deve essere compresa fra pu, pv.

Una più minuta disamina dei vari casi possibili riguardando più da vicino la natura della superficie e delle sue linee geodetiche, come ho detto in principio, sarà oggetto di altra Nota.

Palermo, aprile 1889.

M. L. Albeggiani.

SOLUTION DU PROBLÈME DE MALFATTI;

par M. **Ernest Lebon**,

prof. au Lycée Charlemagne, à Paris,

rédacteur du *Bulletin scientifique*.

Adunanza del 24 febbrajo 1889.

Historique.

1. Le problème consistant à *inscrire à un triangle donné trois cercles, tels que chacun d'eux soit tangent aux deux autres et à deux côtés du triangle*, est désigné sous le nom de Problème de Malfatti, parce que cet illustre géomètre italien (mort en 1807) a, le premier, donné la construction des trois cercles dans son *Memoria sopra un problema stereotomico,* inséré dans les *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze,* tomo X, parte I, Modena, MDCCCIII.

Ce remarquable problème a ensuite attiré l'attention de plusieurs géomètres distingués; mais aucun n'a donné de construction aussi simple que celle que propose Malfatti. Celle-ci dérive immédiatement des formules qu'il a trouvées et qui donnent les valeurs de trois segments des côtés, chaque segment étant compris entre un sommet et le point de contact avec le cercle tangent aux deux côtés issus de ce sommet. Ces formules, qui sont, aux notations près, celles auxquelles nous arrivons par une analyse algébrique directe, ont été *posées a priori* par

Malfatti, et ensuite *vérifiées* par lui avec les équations du problème. Le seul regret qu'il y ait à exprimer est que ce géomètre ait préféré montrer que les valeurs qui entrent dans ces formules vérifient les équations du problème, plutôt que d'expliquer comment il avait trouvé ces valeurs. Nous pensons que c'est pour cette raison que de très estimables recueils de problèmes ont préféré présenter la construction de Steiner, bien qu'elle soit longue et graphiquement peu exacte. (On trouvera cette construction dans les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, par Catalan, 2ᵉ éd. 1879). Notre solution directe et élémentaire décidera, nous l'espérons, à faire adopter des formules dont l'expression est d'une simplicité extrême et dont la construction est d'une facilité et d'une exactitude graphiques très remarquables.

2. Signalons les principaux écrits qui ont été suggérés par le Mémoire de Malfatti.

Gergonne, dans ses *Annales*, tome I, 1810-1811, arrive à une valeur très compliquée du rayon de chacun des cercles cherchés, et avoue qu'il ne peut parvenir à en déduire les formules de Malfatti. Dans le tome II, 1811-1812, Gergonne annonce qu'il a reçu la traduction du travail de Malfatti; il est regrettable qu'il n'ai pas cru utile de la publier, car la vérification de Malfatti est plus courte que celle que Gergonne propose pour la remplacer. Dans le tome X, 1819, Lechmutz donne une solution trigonométrique directe du problème de Malfatti; mais, comme le fait remarquer Simons, « la longueur excessive des calculs ne permet pas d'y retrouver un plan d'ensemble ». D'ailleurs, Lechmutz, s'étant attaché à obtenir les expressions des rayons des trois cercles, arrive à des formules moins simples que celles de Malfatti et d'une construction pénible.

Dans le tome I, 1826, du *Journal de Crelle*, Steiner donne une construction compliquée du problème de Malfatti; dans le tome X, 1833, Zornow démontre cette construction. Dans le tome XLV, 1853, Schellbach publie une nouvelle vérification des formules de Malfatti. Dans le tome LXXVI, 1873, Mertens montre que ces formules sont applicables au cas du triangle sphérique.

Un géomètre français, qui s'est signalé par de remarquables travaux sur un grand nombre de questions importantes, Catalan, a eu

le bonheur de réduire notablement la solution de Lechmutz ; son travail est inséré dans le tome V, 1845, des *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

Simons, dans le *Bulletin de l'Académie de Belgique*, 1874, analyse les principaux travaux relatifs au problème de Malfatti, et donne les résultats auxquels lui-même est parvenu. Mais il attribue à Malfatti des formules faisant connaître les rayons des trois cercles cherchés : c'est là une erreur qu'il importe de relever, parce qu'elle enlève à Malfatti l'honneur d'avoir trouvé les formules les plus simples.

Enfin, Pelletreau, dans le *Compte rendu de la session de 1888 de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences*, démontre, par la géométrie analytique, que l'on peut obtenir les rayons de trois cercles tangents deux à deux et tangents chacun à deux côtés d'un triangle semblable au triangle proposé, en déterminant d'abord deux droites par la construction de rapports de lignes trigonométriques et de troisièmes proportionnelles.

Résolution directe du problème de Malfatti.

3. Supposons le problème résolu.

Soient (*figure*) :

ABC un triangle donné ;

A', B', C' les centres des cercles cherchés ;

D et E, F et G, H et I les points de contact des cercles A', B', C' avec les côtés du triangle ;

O le centre du cercle inscrit au triangle ;

P, Q, R les points de contact de ce cercle et des côtés BC, CA, AB.

Appelons :

a, b, c les côtés du triangle opposés aux angles A, B, C ;

p le demi-périmètre du triangle ;

α, β, γ les trois segments AD ou AE, BF ou BG, CH ou CI ;

α', β', γ' les rayons des cercles A', B', C' inscrits aux angles A, B, C.

La figure donne immédiatement les trois égalités suivantes:

$$(M) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= \beta + \gamma + GH, \\ b &= \gamma + \alpha + ID, \\ c &= \alpha + \beta + EF. \end{aligned} \right.$$

Pour calculer GH, menons à BC la parallèle $C'J$ coupant $B'G$ en J. Le triangle rectangle $B'JC'$ donne

$$\overline{C'J}^2 = (\beta' + \gamma')^2 - (\beta' - \gamma')^2,$$

d'où l'on tire

$$(N) \qquad GH = 2\sqrt{\beta'\gamma'}.$$

On obtient de même

$$(P) \qquad ID = 2\sqrt{\gamma'\alpha'}, \qquad EF = 2\sqrt{\alpha'\beta'}.$$

Les triangles semblables ADA' et AQO donnent

$$(1) \qquad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{r}{p-a},$$

car on sait que $AQ = p - a$. On trouve de même

$$(2) \qquad \frac{\beta'}{\beta} = \frac{r}{p-b},$$

$$(3) \qquad \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{r}{p-c}.$$

Multipliant membre à membre les égalités (2) et (3), et tenant compte de la relation connue

$$(Q) \qquad r\sqrt{p} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

on obtient

$$(R) \qquad \beta'\gamma' = \frac{p-a}{p}\beta\gamma.$$

On trouve de même

$$(S) \qquad \gamma'\alpha' = \frac{p-b}{p}\gamma\alpha, \qquad \alpha'\beta' = \frac{p-c}{p}\alpha\beta.$$

Par suite des égalités (N), (P) et (R), (S), les trois équations (M) deviennent

$$(4)\qquad \beta+\gamma-a+2\sqrt{\frac{p-a}{p}}\cdot\sqrt{\beta\gamma}=0,$$

$$(5)\qquad \gamma+\alpha-b+2\sqrt{\frac{p-b}{b}}\cdot\sqrt{\gamma\alpha}=0,$$

$$(6)\qquad \alpha+\beta-c+2\sqrt{\frac{p-c}{c}}\cdot\sqrt{\alpha\beta}=0.$$

En résolvant ce système d'équations simultanées, on obtiendra les formules donnant les valeurs des trois segments α, β, γ, et ensuite, au moyen des équations (1), (2), (3), on aura les formules donnant les rayons α', β', γ'.

Ayant remarqué que, si l'on pose

$$\beta+\gamma=x,\qquad \gamma+\alpha=y,\qquad \alpha+\beta=z,$$

la résolution du système d'équations (4), (5), (6) est ramenée à celle d'un autre système à trois inconnues, *nous avons eu l'idée* de chercher la valeur d'un des binômes tels que $(\beta+\gamma)$.

Or, les équations (5) et (6) peuvent être considérées comme étant des équations du second degré dont l'inconnue est $\sqrt{\alpha}$; appliquant la formule connue pour éliminer α, faisant les calculs en conservant le binôme $(\beta+\gamma)$, remplaçant $\beta\gamma$ par la valeur que fournit l'équation (4), tenant compte des relations entre p et a, b, c, on obtient, d'une manière simple et rapide, l'équation suivante:

$$(T)\qquad \begin{aligned}(\beta+\gamma-b-c)\sqrt{\beta\gamma}-\sqrt{(p-b)(p-c)}(\beta+\gamma)\\ +p\sqrt{(p-b)(p-c)}=0.\end{aligned}$$

Puis, en éliminant $\sqrt{\beta\gamma}$ entre les équations (4) et (T) et en tenant

compte de la relation (Q), on arrive à l'équation

$$(7)\quad (\beta+\gamma)^2-2(p-r)(\beta+\gamma)+a(b+c)-2pr=0,$$

qui donne la valeur du binôme $(\beta+\gamma)$.

Il est facile, par analogie, d'écrire les équations qui donnent les valeurs des binômes $(\gamma+\alpha)$ et $(\alpha+\beta)$.

Pour qu'une racine de l'équation (7) convienne au cas de figure considéré; il faut qu'elle soit réelle, positive et inférieure à a.

Comme le réalisant de l'équation (7) est la quantité positive

$$(p-a)^2+r^2,$$

les deux racines sont réelles Elles sont positives, car leur somme et leur produit sont positifs. La substitution de a au binôme $(\beta+\gamma)$ dans le premier membre de l'équation (7) donne le résultat négatif $2r(a-p)$: donc l'une des racines est comprise entre zéro et a, l'autre est supérieure à a. Par suite, *la petite racine de l'équation* (7) *seule convient au cas de figure où les cercles cherchés sont intérieurs au triangle donné*; (rappelons que Malfatti et tous les géomètres qui ont publié des travaux sur son problème n'ont considéré que ce cas de figure.)

4. *Second cas de figure du problème de Malfatti.* — Pour *interpréter* la seconde racine de l'équation (7), nous avons considéré un cas de figure dans lequel la somme des segments situés sur un côté est plus grande que ce côté; nous avons eu d'abord les trois équations (1), (2), (3), et ensuite trois équations, que nous désignerons par $(4)_1$, $(5)_1$, $(6)_1$, qui ne diffèrent des équations (4), (5), (6) qu'en ce que le terme irrationnel a le signe — au lieu du signe +. L'élimination de α entre les équations $(5)_1$ et $(6)_1$ donne encore la résultante (T). L'élimination de $\sqrt{\beta\gamma}$ entre les équations $(4)_1$ et (T) donne l'équation

$$(7)_1\quad (\beta+\gamma)^2-2(p+r)(\beta+\gamma)+a(b+c)+2pr=0.$$

Pour qu'une racine de l'équation $(7)_1$ convienne au cas de figure

considéré, il faut qu'elle soit réelle, positive, supérieure à a et inférieure à la distance $(b + c)$ des points de contact des cercles ex-inscrits aux angles B et C.

Comme le réalisant de l'équation $(7)_1$ est la quantité positive

$$(p - a)^2 + r^2,$$

les deux racines sont réelles. Elles sont positives, car leur somme et leur produit sont positifs. La substitution de a au binôme $(\beta + \gamma)$ dans le premier membre de l'équation $(7)_1$ donne le résultat positif $2r(p - a)$: donc a est extérieur aux racines, et comme a est plus petit que leur demi-somme $(p + r)$, les deux racines sont supérieures à a. La substitution du binôme $(b + c)$ au binôme $(\beta + \gamma)$ dans le premier membre de l'équation $(7)_1$ donne le résultat négatif $2r(p-b-c)$: donc l'une des racines est comprise entre a et $(b + c)$ et l'autre est supérieure à $(b + c)$. Par suite, *la petite racine de l'équation* $(7)_1$ *seule convient au cas de figure où chaque cercle cherché est tangent à deux côtés du triangle et coupe le troisième.*

5. *Convention sur le signe de r.* — On remarque que l'équation (7) devient l'équation $(7)_1$ si l'on y remplace r par $-r$; donc *la petite racine de l'équation* (7) *convient au premier cas de figure en y donnant à r le signe +, et la grande racine de cette équation convient au second cas de figure en y donnant à r le signe —.*

6. *Formules donnant les segments.* — Les racines de l'équation (7) sont

$$\beta + \gamma = p - r \pm a', \tag{8}$$

en remarquant que la quantité sous radical égale $\overline{AD}^2$ ou a'^2.

Par analogie, on peut écrire :

$$\gamma + \alpha = p - r \pm b', \tag{9}$$

$$\alpha + \beta = p - r \pm c'. \tag{10}$$

En désignant par α_1, β_1, γ_1 les valeurs de α, β, γ correspondant au premier cas de figure, et par α_2, β_2, γ_2, celles correspondant au second, mettant en évidence le signe de r, on trouve aisément, au moyen des équations (8), (9), (10), les formules suivantes, où toutes les lettres représentent des quantités positives :

pour le *premier cas de figure* :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} 2\alpha_1 &= p - r + a' - b' - c', \\ 2\beta_1 &= p - r - a' + b' - c', \\ 2\gamma_1 &= p - r - a' - b' + c'; \end{aligned}\right.$$

pour le *second cas de figure* :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} 2\alpha_2 &= p + r - a' + b' + c', \\ 2\beta_2 &= p + r + a' - b' + c', \\ 2\gamma_2 &= p + r + a' + b' - c'. \end{aligned}\right.$$

7. *Première construction des cercles cherchés.* — Elle consiste simplement à construire la somme des lignes affectées du signe $+$, à en retrancher la somme des lignes affectées du signe $-$; la moitié de la différence est un segment. Portant les segments sur les côtés, on a les points de contact des cercles cherché; des perpendiculaires aux côtés en ces points donnent leurs centres sur les bissectrices. Telle est, à peu près, la construction si simple de Malfatti.

8. *Seconde construction des cercles cherchés.* — Considérant les formules (11) et (12), on voit que l'on peut écrire

$$(13)\quad a' - \alpha_1 = b' - \beta_1 = c' - \gamma_1 = \frac{-p + r + a' + b' + c'}{2},$$

$$(14)\quad a' + \alpha_2 = b' + \beta_2 = c' + \gamma_2 = \frac{p + r + a' + b' + c'}{2}.$$

Nous désignerons par ρ_1 et par ρ_2 les valeurs qui forment les derniers membres de ces égalités.

D'après ces égalités, si l'on porte sur les bissectrices du triangle, à partir de ses sommets, des distances respectivement égales aux segments ayant ces sommets pour origine, on obtient sur les bissectrices trois points A_1, B_1, C_1 situés sur un cercle de rayon ρ_1 dans le premier cas de figure, (cette construction a été signalée par Simons;) et trois points A_2, B_2, C_2 situés sur un cercle de rayon ρ_2 dans le second cas de figure.

Les deux cercles de rayons ρ_1 et ρ_2 ayant été décrits, on obtient facilement les points de contact des cercles cherchés avec les côtés.

9. *Valeurs des segments en fonction des côtés.* — On peut trouver les valeurs des segments en fonction des côtés, car l'on connait la formule (Q) donnant r, et on obtient aisément les suivantes:

$$(T) \qquad a'^2 = \frac{bc(p-a)}{p}, \qquad b'^2 = \frac{ac(p-b)}{p}, \qquad c'^2 = \frac{ab(p-c)}{p}.$$

10. *Propriétés tirées des valeurs des segments.* — Des valeurs des segments dans les deux cas de figure, on peut tirer diverses propriétés relatives à la figure formée par le triangle donné et par les six cercles obtenus; voici quelques propriétés remarquables :

1° $\qquad \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2 = p.$

2° $\qquad \alpha_2 - \alpha_1 = r - a' + b' + c'$, etc.

3° $\qquad \alpha_1 - \beta_1 = -(\alpha_2 - \beta_2) = a' - b'$, etc.

4° $\qquad \alpha_2 + \beta_2 - (\alpha_1 + \beta_1) = 2(r + c')$, etc.

5° Les points de contact du cercle inscrit à un triangle ayant pour côtés les valeurs de $(\beta_1 + \gamma_1)$, $(\gamma_1 + \alpha_1)$, $(\alpha_1 + \beta_1)$, ou à un triangle ayant pour côtés les valeurs de $(\beta_2 + \gamma_2)$, $(\gamma_2 + \alpha_2)$, $(\alpha_2 + \beta_2)$, déterminent sur les côtés des segments égaux à α_1, β_1, γ_1 ou à α_2, β_2, γ_2.

Recherche des divers cas de figure du problème de Malfatti.

11. En examinant les positions relatives de trois cercles satisfaisant aux conditions de l'énoncé du problème de Malfatti, nous avons trouvé les cas de figure suivants :

I. — Si les trois cercles sont tangents deux à deux extérieurement, 1° les trois cercles sont dans le triangle donné ; 2° chacun des trois cercles coupe le côté auquel il n'est pas tangent; (ces deux cas sont ceux que nous venons de traiter;) 3° les trois cercles sont dans un même angle du triangle et tous trois extérieurs au triangle: il y a alors trois cas de figure; 4° les trois cercles sont dans un même angle du triangle, deux étant tangents au côté opposé à cet angle, l'autre coupant ce côté: alors il y a encore trois cas de figure. Donc le problème de Malfatti présente *huit cas généraux* de figure lorsque les trois cercles sont tangents extérieurement.

Les systèmes d'équations relatifs aux six derniers cas sont analogues à ceux des deux premiers.

II. — Si deux des cercles sont tangents extérieurement et si le troisième est intérieur à l'un des précédents, il faut, pour que ce cercle soit tangent aux deux autres, que les trois cercles soient tangents au même point; alors, chaque cercle intérieur est dans l'angle opposé par le sommet à chacun des angles du triangle. Le problème de Malfatti présente alors *six cas particuliers* de figure.

L'une des trois équations du système relatif à chacun de ces six cas de figure ne contient pas la racine du produit de deux inconnues.

III. — Si deux des cercles sont tangents entre eux extérieurement et tangents intérieurement à un troisième cercle, il faut qu'alors les points de contact du plus grand cercle avec deux côtés du triangle soient les points de contact des deux petits cercles avec ces mêmes côtés; de plus, ou les deux petits cercles sont intérieurs au triangle et tangents à un même côté quelconque: d'où il résulte trois cas de figure; ou les deux petits cercles sont extérieurs au triangel et tangents à un même côté quelconque: d'où il résulte trois cas de figure. Le problème de Malfatti présente alors *six cas particuliers* de figure.

Deux des trois équations du système relatif à chacun de ces cas de figure ne contiennent pas la racine du produit de deux inconnues.

IV. — Si les points de contact du grand cercle et des deux petits sont tous trois sur les trois côtés du triangle, les trois cercles se confondent, et on a pour *solutions particulières* le cercle inscrit et les trois cercles ex-inscrits au triangle.

Paris, le 18 février 1889.

ERNEST LEBON.

ÉTUDE

D'UN DÉPLACEMENT PARTICULIER D'UNE FIGURE DE FORME INVARIABLE

PAR DES PROCÉDÉS ÉLÉMENTAIRES ET PUREMENT GÉOMÉTRIQUES;

par M. le prof. **A. Mannheim**, à Paris.

Adunanza del 10 marzo 1889.

Dans mon travail *Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace* (*), j'ai démontré que: *Lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur quatre plans donnés, un point quelconque de cette droite décrit une ellipse.*

Je suis arrivé à ce théorème en faisant usage de quelques propositions de *géométrie cinématique.*

Certes, la découverte d'une vérité géométrique constitue toujours un progrès, quelle que soit la voie suivie pour y parvenir. Mais, à côté de ce progrès, il y en a un autre d'ordre différent, qui consiste à démontrer *géométriquement* une vérité géométrique, en ne recourant qu'au plus petit nombre possible de propriétés primordiales.

Les démonstrations données par plusieurs géomètres du théorème que je viens de rappeler ne répondent pas à cette idée. C'est pourquoi, le reprenant moi-même, j'ai entrepris l'essai suivant.

(*) *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, séances des 3 et 10 mars 1873, et *Bulletin de la Société Mathématique de France*, tome I, page 106.

En outre, j'ai réuni dans le présent travail quelques théorèmes qui se rattachent directement à celui énoncé plus haut et j'ai terminé en étudiant d'une façon purement géométrique ce qui est relatif au déplacement d'une figure dont chacun des points décrit une ellipse.

§ I.

SUR LE DÉPLACEMENT DANS L'ESPACE D'UNE DROITE DONT TOUS LES POINTS DÉCRIVENT DES ELLIPSES.

THÉORÈME I. — *On donne quatre plans (P_1), (P_2), (P_3), (P_4), et une droite D qui les rencontre aux points p_1, p_2, p_3, p_4: d'un point quelconque de l'un des plans on peut mener une droite, et une seule, qui soit partagée par les plans donnés comme ceux-ci partagent D.*

Soit a_1 un point quelconque de (P_1). Menons un plan parallèle à (P_2) et à une distance telle, qu'une droite arbitraire, issue de a_1, soit partagée par (P_2) et ce plan parallèle, en segments dont le rapport est égal à $\frac{p_1p_2}{p_1p_4}$. Ce plan parallèle à (P_2) coupe (P_4) suivant une droite. On obtient une droite analogue sur (P_4) en opérant avec (P_3) comme nous venons de le faire avec (P_2).

Ces deux droites se coupent en un point a_4: la droite a_1a_4 est la droite demandée et il résulte de sa construction qu'elle est unique.

Pour simplifier le langage, je dirai que la droite a_1a_4 est *proportionnelle à D* et que les points a_1, a_2, a_3, a_4 où elle rencontre les plans donnés sont des *points correspondants*.

REMARQUE. — *La droite proportionnelle à D qui passe par un point à l'infini sur l'un des plans est toute entière à l'infini.*

THÉORÈME II. — *Sur chacun des plans donnés les points correspondants aux points d'une droite arbitraire a_1b_1 de l'un d'eux sont en ligne droite.*

Des points a_1, b_1 menons les droites a_1a_4, b_1b_4 proportionnelles à D et formons le quadrilatère gauche $a_1b_1a_4b_4$. Les droites a_2b_2, a_3b_3 partagetn, comme l'on sait, en segments proportionnels aux segments de D toutes les droites qui divisent proportionnellement les côtés a_1b_1, a_4b_4: de là résulte le théorème énoncé.

Je dirai que les droites $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, $a_4 b_4$ sont *correspondantes.*

THÉORÈME III. — *On construit des droites proportionnelles à D et l'on prend sur chacune de ces droites le point homologue à un point arbitraire p_5 de D: tous ces points appartiennent à un même plan (P_5).*

Il résulte de la démonstration du théorème précédent, que les points homologues de p_5, sur les droites proportionnelles à D qui s'appuient sur $a_1 b_1$, appartiennent à une droite $a_5 b_5$. On peut dire la même chose pour toutes les droites issues de p_1 qui s'appuient sur $a_1 b_1$. On obtient ainsi des droites partant de p_5 et qui s'appuient sur $a_5 b_5$. Le lieu de ces droites est un plan (P_5) qui contient d'après cela l'homologue de p_5 pris sur une droite quelconque proportionnelle à D.

Par chacun des points de D passe un plan tel que (P_5). Je dirai que *tous ces plans appartiennent au système des quatre plans donnés.*

REMARQUE. — Du théorème II résulte qu'*à une droite de l'un des plans du système correspond une droite sur tous les autres.*

THÉORÈME IV. — *Si l'on prend sur l'un des plans du système des droites convergentes en un point à distance finie ou infinie, il leur correspond, sur tous les autres plans, des droites convergentes en un point à distance finie ou infinie.*

Ce théorème se démontre immédiatement en employant la droite proportionnelle à D qui passe par le point de convergence des droites données.

THÉORÈME V. — *A une conique tracée sur l'un des plans du système, correspond une conique sur chacun des autres plans du système.*

A une droite de l'un des plans du système correspond une droite sur chacun des autres plans, par suite à une courbe d'un certain ordre correspond une courbe de ce même ordre sur chacun des autres plans du système. En particulier, ceci est vrai pour une conique tracée sur l'un des plans du système.

THÉORÈME VI. — *Si une conique C_1 tracée sur (P_1) est une ellipse, les courbes correspondantes sont aussi des ellipses.*

Car C_1 n'ayant pas de point à l'infini il en est de même sur les coniques correspondantes.

THÉORÈME VII. — *Les centres des coniques correspondantes C_1, C_2, C_3, sont des points correspondants.*

En effet une tangente à C_1 a pour correspondantes des tangentes

aux coniques correspondantes C_2, C_3, ... Deux tangentes à C_1, qui sont parallèles, ont pour correspondantes, d'après le théorème IV, des tangentes parallèles pour chacune des ellipses correspondantes à C_1. Par suite, les diamètres de contact de ces tangentes parallèles se correspondent et alors aussi les centres des ellipses correspondantes.

Appliquons les théorèmes précédents : prenons un ellipsoïde (S) et coupons-le par un plan arbitraire (P). Appelons S la section ainsi obtenue. On sait que *les normales à* (S), *dont les pieds sont les points de* S, *sont partagées par* (P) *et les plans principaux de* (S) *en segments proportionnels*, c'est-à-dire que *ces normales sont des droites proportionnelles.*

De ce que nous venons de démontrer il résulte que :

Les traces de ces normales sur les plans principaux de (S) *sont des ellipses*, que *les centres de ces courbes sont sur une droite qui passe par le centre de* S et enfin que *cette droite des centres est proportionnelle aux normales de* (S).

Prenons l'ellipsoïde concentrique et homothétique à (S) qui est tangent à (P). Son point de contact avec (P) est, comme l'on sait, le centre de S. La perpendiculaire à (P) élevée de ce centre est la normale à cet ellipsoïde. Comme cette surface est homothétique à (S) cette normale est proportionnelle aux normales de (S), elle est alors la droite des centres des ellipses qui entrent dans le dernier énoncé. On peut donc compléter celui-ci en disant : *Cette droite des centres est perpendiculaire au plan* (P).

Reprenons maintenant les plans du système et la droite D dont nous nous sommes servis d'abord.

J'appelle *droite égale* à D une droite sur laquelle les plans du système déterminent des segments égaux aux segments que ces plans déterminent sur D.

THÉORÈME VIII. — *Sur une droite arbitraire* $a_1 b_1$ *de* (P_1) *il ne peut y avoir que deux points par lesquels passent des droites égales à* D.

Par a_1 et b_1 (fig. 1) menons des droites proportionnelles à D_1; elles rencontrent (P_2) en a_2 et b_2. Par a_2 menons la droite $a_2 l$, égale et parallèle à $a_1 b_1$, puis menons la droite $l b_2$. Sur le plan $b_1 l b_2$ décrivons du point b_1 comme centre une circonférence ayant un rayon égal au segment compris sur D entre (P_1) et (P_2).

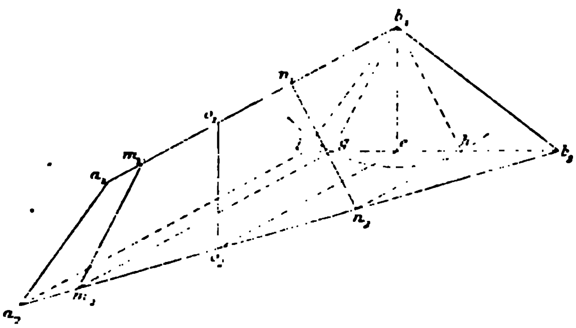


fig. 1.

Cette circonférence coupe $l b_2$ aux points g, h; de ces points menons $g m_2$, $h n_2$ parallèlement à $a_2 l$. Les points m_2, n_2, où ces droites rencontrent $a_2 b_2$, appartiennent aux droites égales demandées : l'une est $m_2 m_1$, parallèle à $g b_1$, l'autre est $n_2 n_1$ parallèle à $h b_1$.

D'abord les segments $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ sont égaux puisqu'ils sont respectivement égaux aux segments égaux $g b_1$, $h b_1$; ensuite ils appartiennent à des droites proportionnelles à D puisque $a_1 a_2$, $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ étant parallèles au plan $l b_1 h$ partagent $a_1 b_1$ et $a_2 b_2$ en segments proportionnels.

On voit ainsi que les droites égales qui s'appuient sur $a_1 b_1$ sont les deux seules droites $m_1 m_2$, $n_1 n_2$.

Remarques. — Lorsque l'arc décrit du point b_1 comme centre coupe $l_2 b$ en deux points, il y a deux droites égales qui s'appuient sur $a_1 b_1$. Mais si cet arc est tangent à $l b_2$ il n'y a plus qu'une droite égale $o_1 o_2$ dont la longueur est celle de la perpendiculaire abaissée de b_1 sur $l b_2$. La droite $o_1 o_2$ est alors, parmi les droites proportionnelles à D qui s'appuient sur $a_1 b_1$, celle sur laquelle les plans du système interceptent les plus petits segments. L'arc tangent à $l b_2$ touche cette droite au milieu de $g h$. De tout cela résulte que:

La droite proportionnelle à D qui s'appuie sur $a_1 b_1$ et sur laquelle

il y a les plus petits segments, est la droite $o_1 o_2$ qui joint les milieux des segments $m_1 n_1$, $m_2 n_2$ déterminés sur les droites correspondantes $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ par deux droites égales. Le segment $o_1 o_2$ est égal à la bissectrice du triangle isocèle $g b_1 h$.

THÉORÈME IX. — *Le lieu des points d'un plan du système d'où partent des droites égales est une ellipse E.*

Ce lieu est une conique, puisque d'après le théorème précédent, une droite quelconque de ce plan ne le rencontre qu'en deux points. Cette conique est une ellipse, car il ne peut y avoir de point à l'infini puisque d'un pareil point on ne peut mener une droite égale à une droite donnée à distance finie.

REMARQUE. — On peut encore énoncer ainsi ce théorème:

Si on déplace une droite de façon que quatre de ses points restent sur quatre plans donnés, tous ses points décrivent simultanément des ellipses.

Ces ellipses sont des courbes correspondantes à E et en vertu du théorème VII *leurs centres sont en ligne droite.*

Nous avons ainsi retrouvé le théorème rappelé au commencement de ce travail en y ajoutant ce qui concerne la nature du lieu des centres des ellipses décrites.

THÉORÈME X. — *La droite O des centres des ellipses correspondantes à E est, parmi les droites proportionnelles à D, celle sur laquelle les segments interceptés par les plans du système sont les plus petits possibles* (*).

Avec une corde de direction arbitraire de l'ellipse E, la corde de l'ellipse correspondante sur (P_2) et les droites égales qui réunissent les extrémités de ces droites, on forme un quadrilatère gauche analogue au quadrilatère $m_1 m_2 n_1 n_2$ de la figure 1.

D'après ce que nous avons vu la droite proportionnelle à D qui s'appuie sur ces cordes, et sur laquelle il y a les plus petits segments, s'obtient en joignant par une droite les milieux de ces cordes. Pour chacune des cordes de E parallèles entr'elles on obtient ainsi une droite qui passe par le milieu de cette corde; toutes ces droites s'appuient sur le diamètre dont la direction est conjuguée de celle de ces cordes parallèles.

(*) Halphen. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, tome I, page 114.

On peut répéter pour ce diamètre ce que je viens de dire pour une corde et l'on trouve ainsi que la droite proportionnelle à D, sur laquelle les plans du système interceptent les plus petits segments, passe par le centre de E et alors aussi par les centres des ellipses correspondantes à cette courbe. Le théorème se trouve ainsi démontré.

THÉORÈME XI. — *Les droites égales, qui s'appuient sur E, sont également inclinées sur la droite O des centres des ellipses correspondantes à E.*

Supposons que $m_1 n_1$ (figure 1) soient les extrémités d'un diamètre de E. Parmi les droites proportionnelles à D qui s'appuient sur ce diamètre celle sur laquelle il y a les plus petits segments est la droite $o_1 o_2$ qui est égale, comme nous l'avons vu, à la bissectrice du triangle isocèle $g b_1 h$ dont les côtés égaux sont parallèles à $m_1 m_2$, $n_1 n_2$. Les droites égales $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ sont alors également inclinées sur $o_1 o_2$. Mais pour un autre diamètre de E on est toujours conduit à construire un triangle isocèle égal à $g b_1 h$ puisque les côtés de ce triangle doivent être égaux à $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ et que la bissectrice doit être égale à $o_1 o_2$. Ces triangles isocèles étant égaux, le théorème est démontré.

THÉORÈME XII. — *La distance $o_1 o_2$ des centres des ellipses décrites par les points m_1, m_2 d'une droite égale mobile est égale à la projection du segment $m_1 m_2$ sur la droite O.*

Cela résulte de ce que $o_1 o_2$ est égal et parallèle à la bissectrice du triangle isocèle $g b_1 h$ et que cette bissectrice est en même temps la hauteur de ce triangle.

THÉORÈME XIII. — *Les points de deux droites proportionnelles à D qui se déplacent en restant chacune égale à elle-même, décrivent sur chacun des plans donnés des ellipses concentriques et homothétiques* (*).

Quelle que soit la droite proportionnelle que l'on prenne comme droite égale mobile, on a toujours le même centre pour les ellipses décrites sur l'un des plans donnés parce que ce point est, sur la droite unique O, proportionnelle à D, sur laquelle les plans donnés déterminent les segments les plus petits possibles.

Prenons (fig. 1) les droites proportionnelles $n_1 n_2 n_3$ et $b_1 b_2 b_3$ qui partent de deux points d'une droite issue de o_1. On a

$$\frac{o_1 n_1}{o_1 b_1} = \frac{o_2 n_2}{o_2 b_2} = \frac{e h}{e b_2}.$$

(*) Halphen, loc. cit.

Ce dernier rapport est constant quelle que soit la position de b_1 sur E puisque les triangles isocèles tels que $g b_1 h$ sont toujours égaux et que $b_1 b_2$ est un segment de grandeur constante.

Le rapport $\frac{o_1 n_1}{o_1 b_1}$ est alors constant et le théorème est démontré.

Voici une application des théorèmes précédents:

Lorsqu'une droite se déplace de façon que trois de ses points restent sur trois plans donnés un quatrième point de cette droite décrit un ellipsoïde qui a pour centre le point de rencontre des plans donnés.

Ajoutons un quatrième plan passant par le quatrième point de la droite mobile. Si l'on déplace maintenant la droite de façon que ce point reste sur ce plan, il décrira une ellipse. La section faite par ce plan dans la surface engendrée est donc une ellipse. Comme ceci est vrai quel que soit ce plan, cette surface est donc un ellipsoïde.

Si le plan mené par le point décrivant passe par le point de rencontre des trois plans donnés il résulte du théorème X que ce point est le centre de l'ellipse décrite. Ce plan, mené par le point de rencontre des plans donnés, étant arbitraire, ce dernier point est le centre de l'ellipsoïde engendré par le quatrième point de la droite mobile. Le théorème est donc démontré.

Ce théorème, qui est dû à Dupin, donne lieu à ce cas particulier intéressant :

Lorsqu'une droite se déplace de façon que trois de ses points restent respectivement sur trois plans parallèles à une droite, un quatrième point de cette droite décrit un plan.

Je ne fais qu'énoncer ce résultat, ayant laissé de côté les cas particuliers des théorèmes démontrés dans ce premier paragraphe.

§ II.

SUR LE DÉPLACEMENT DANS L'ESPACE D'UNE FIGURE DE GRANDEUR INVARIABLE DONT LES POINTS DÉCRIVENT DES ELLIPSES.

Comme figure de grandeur invariable nous n'avons considéré jusqu'à présent qu'une droite égale mobile dont quatre points restent sur quatre

plans fixes. Nous allons montrer comment la propriété de cette droite de faire toujours, pendant son déplacement, le même angle avec la droite des centres des ellipses décrites par ses points, conduit aisément à déterminer les conditions de déplacement d'une figure de forme invariable dont chacun des points décrit une ellipse.

Conservons les notations précédentes avec cette seule différence que nous appellerons D' la droite désignée précédemment par D. Plaçons O verticalement, appelons (H) un plan horizontal fixe. La droite égale mobile D', se déplaçant toujours de façon que quatre de ses points restent sur les plans (P_1), (P_2), (P_3), (P_4), fait constamment le même angle avec (H).

Appelons D la projection de D' sur le plan (H).

Puisque, comme nous l'avons démontré, les points de D' décrivent des ellipses dont les centres sont sur O, les points de la droite D décrivent des ellipses concentriques dont le centre commun est le pied o de O sur (H).

Lemme. — *Le déplacement sur (H), de la droite D dont les points décrivent des ellipses concentriques, peut être obtenu en liant cette droite à une circonférence qui roule dans l'intérieur d'une autre de rayon double.*

Pour un déplacement infiniment petit de D on a un centre instantané de rotation c. La circonférence décrite sur oc comme diamètre rencontre (je le suppose d'abord) D en deux points réels. Les normales aux trajectoires de ces points passent par c et par suite les tangentes à ces trajectoires passent par o. Mais les trajectoires de ces point sont des ellipses et il ne peut y avoir pour une pareille courbe de tangente passant par le centre que si cette courbe est infiniment aplatie : ces deux points décrivent donc chacun une droite et le déplacement de D est alors celui d'une droite dont deux points décrivent chacun une droite.

Un pareil déplacement peut être obtenu, comme l'on sait, en supposant que D soit lié à la circonférence $\frac{C}{2}$ décrite sur oc comme diamètre que l'on fait rouler à l'intérieur de la circonférence C décrite du point o comme centre avec oc pour rayon.

Mais ces circonférences existent toujours et ne dépendent aucunement de la réalité des points de rencontre de D avec la circonférence

décrite sur oc comme diamètre; par conséquent le résultat auquel nous venons d'arriver est général et le lemme est démontré.

Nous savons que D' fait toujours un angle constant avec sa projection D. On obtiendra alors le déplacement de D' en supposant que sur son plan projetant, entrainé avec D, cette droite soit transportée en même temps parallèlement à la direction des projetantes, c'est-à-dire qu'elle glisse dans la direction de O.

D'après cela, appelons (Cy) le cylindre dont C est la section droite, et $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ le cylindre dont $\frac{C}{2}$ est la section droite; nous obtiendrons le déplacement de D' en liant cette droite au cylindre $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ qui roule à l'intérieur de (Cy), en même temps qu'il glisse dans la direction de ses génératrices, de façon qu'un point de D' soit assujetti à se déplacer sur le plan du système qui le contient (*).

Le déplacement de $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ étant ainsi défini, on peut entrainer une figure de forme invariable avec ce cylindre mobile. Nous savons déjà que tous les points de D' décrivent des ellipses. Nous allons montrer qu'il en est de même de tous les points de la figure entrainée. Pour cela il suffit de faire voir que la trajectoire d'un quelconque de ces points est une ligne plane puisque la projection de cette trajectoire sur (H) est la ligne décrite par un point du plan de $\frac{C}{2}$ qui roule dans C et l'on sait que cette courbe est une ellipse.

Pour y arriver démontrons d'abord le théorème suivant qu'on n'avait pas encore énoncé:

THÉORÈME XIV. — *Le cylindre* $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ *roule à l'intérieur de* (Cy) *et glisse de façon qu'un point* m' *se déplace sur un plan fixe donné: parmi tous les points entraînés il y en a une infinité qui décrivent des droites.*

(*) *Voir* dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* la communication faite par M. Darboux le 17 janvier 1881 « *Sur le déplacement d'une figure invariable* ».

Soit (M) le plan donné sur lequel se déplace m'; supposons que le plan horizontal (H) passe maintenant par le point de rencontre de (M) et de O; désignons toujours par o ce point de rencontre.

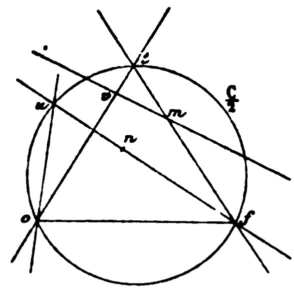


fig. 2.

Prenons le plan (H) pour plan de la figure 2. Soit ot l'horizontale de (M) qui passe par o. Menons par m' l'horizontale $m't'$ qui se projette sur (H) suivant la droite mt qui passe par le point de rencontre t de $\frac{C}{2}$ et de l'horizontale ot du plan (M).

L'horizontale $m't'$, menée ainsi par m', rencontre le cylindre $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ au point f' dont la projection est f.

Lorsque $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ roule et glisse comme nous l'avons dit, le point t' se déplace dans le plan vertical ot. Je dis que le point f' décrit une ligne droite.

La ligne décrite par f' se projette sur (H) suivant la ligne of.

Sa projection sur le plan vertical of, faite au moyen de parallèles à ot, est une droite, comme la projection de (M) sur ce plan. Car les perpendiculaires à O abaissées des points de cette dernière droite sont partagées dans un rapport constant par cette projection de la trajectoire de f', puisque ce rapport est toujours égal à $\frac{mt}{ft}$.

La trajectoire de f' se projetant suivant des droites sur deux plans différents est donc une droite.

Comme tous les points de la verticale, qui contient f', décrivent

des lignes égales à la trajectoire de ce point, ils décrivent des droites. Le théorème est donc démontré.

THÉORÈME XV. — *En dehors des points de la verticale f' tous les points invariablement liès au cylindre* $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ *décrivent des ellipses.*

Par le point f' menons arbitrairement l'horizontale $f'u'$ dont la projection (figure 2) est fu. Un point quelconque n de cette droite, entrainée avec $\left(\frac{Cy}{2}\right)$, décrit une ligne plane, car la projection de cette ligne faite sur le plan vertical of est une ligne qui partage dans un rapport constant les perpendiculaires abaissées des points de la droite of' sur O. La trajectoire de n' se projette sur (H) suivant une ellipse puisque cette courbe est engendrée par le point n du segment de grandeur constante uf dont les extrémités décrivent les droites ou et of. La trajectoire de n' est donc une ellipse.

Les points de la verticale qui contient n' décrivent évidemment des ellipses égales à l'ellipse décrite par ce point. On voit donc que tous les points de toutes les horizontales partant de f' c'est-à-dire tous les points du plan horizontal mené par f' décrivent des ellipses et qu'il en est aussi de même de tous les points de l'espace qui peuvent toujours être liés au point de ce plan à l'aide de verticales. En résumé tous les points liés à $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ décrivent des ellipses excepté les points de la verticale f' qui décrivent des segments de droite, lesquels, à proprement parler, sont des ellipses aplaties.

REMARQUES. — *Les ellipses décrites par les points du plan horizontal mené par f' ont toutes même centre au point o.*

Les plans des ellipses décrites par les points d'une horizontale menée par f' passent par une même droite issue du centre commun o.

THÉORÈME XVI. — *Les plans des ellipses décrites par les points d'une horizontale arbitraire, liée au cylindre mobile* $\left(\frac{Cy}{2}\right)$, *enveloppent un cône du second degré.*

Prenons une horizontale arbitraire à la hauteur du point f'. Nous savons construire pour un point m' de cette droite l'horizontale ot du plan de sa trajectoire. Appelons v le point où cette droite rencontre la

projection sur (H) de l'horizontale donnée. La droite vm' est alors, sur le plan projetant de cette horizontale, la trace du plan de la trajectoire de m'. Les droites telles que ft et ot, qui se coupent sur $\frac{C}{2}$ forment deux faisceaux homographiques. Les points tels que m' et v déterminent alors deux divisions homographiques et les droites telles que vm', qui joignent les points correspondants, enveloppent une conique. Cette conique n'est autre que la trace du cône enveloppe des plans des trajectoires décrites par les points de l'horizontale donnée. Le théorème est donc démontré.

REMARQUES. — Les plans des trajectoires décrites par les points d'une horizontale étant respectivement parallèles aux plans des trajectoires des points d'une droite entrainée et dont cette horizontale est la projection, *le théorème précédent s'étend à une droite quelconque.*

Il est facile de voir que, *la conique, trace du cône sur le plan projetant de la droite donnée, est tangente aux plans horizontaux menés par o et f'.*

Le centre de cette conique appartient à la projection orthogonale, faite sur le plan de cette courbe, de l'axe de $\left(\frac{Cy}{2}\right)$; il est du reste sur un plan horizontal à égales distances de o et de f'.

Pour terminer j'énoncerai les résultats suivants, conséquences de ce qui précède.

THÉORÈME XVII. — *Lorsque les points d'une figure mobile dans l'espace décrivent des ellipses, ces courbes ont leurs centres sur une même droite et leurs projections sur un plan perpendiculaire à cette droite sont des ellipses dont la somme ou la différence des axes est constante.*

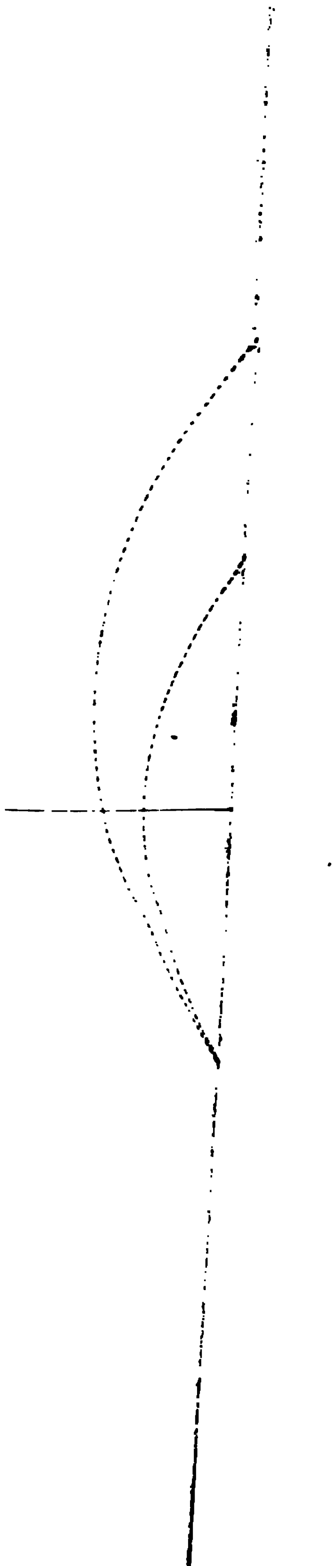
PROBLÈME. — *Étant donné un plan arbitraire construire le point lié à $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ et qui se déplace sur ce plan.*

Le point de rencontre γ du plan donné et de O est le centre de la trajectoire du point demandé. Par le point γ menons l'horizontale du plan donné et par le point où cette droite rencontre $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ menons la génératrice de ce cylindre; l'horizontale, qui s'appuie sur cette gé-

nératrice et qui passe par le point où $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ est rencontré par la parallèle à of' menée du point γ, coupe le plan donné au point cherché.

Paris, février 1889.

MANNHEIM.



Lit Bruno e Salu

UN NUOVO TEOREMA SULLE INVOLUZIONI PIANE.

Nota del dott. **Luigi Berzolari**, in Pavia.

Adunanza del 10 marzo 1889.

L'oggetto di questa Nota è la dimostrazione di un teorema relativo alle trasformazioni piane univoche involutorie, dotate di un punto fondamentale r-plo, per il quale la curva corrispondente passi con $r - 3$ rami. Per brevità ometto di richiamare il significato dei simboli, nonchè le proprietà e le formole, di cui farò uso: d'altronde esse si trovano nei lavori che man mano avrò occasione di citare.

1. In un'involuzione di classe ν (*) e di ordine n si abbia un punto fondamentale 1, per il quale sia $\alpha_{11} = r_1 - 3$, e suppongasi $r_1 \geqq 8$. Allora sarà $\alpha_{ii} \leqq 3$ per ogni altro punto fondamentale i; d'altronde $\alpha_{11} \geqq 5$, epperò sarà $\alpha_{11} > \alpha_{ii} + 1$, e quindi (**) $r_1 > r_i$, cioè 1 è il punto fondamentale che ha la massima molteplicità per l'involuzione. La curva fondamentale C_1 corrispondente al punto 1 passerà quindi (***) per tutti gli altri punti fondamentali, ed avrà in essi

(*) Per il concetto di *classe* v. Caporali, *Sulle trasformazioni univoche piane involutorie* (Rend. della R. Accademia delle scienze fis. e matem. di Napoli, fascicolo 9°, 1879).

(**) Bertini, *Sulle trasformazioni univoche piane e in particolare sulle involutorie* (Rend. del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. XIII, 1880, n° 3).

(***) Bertini, l. c., n° 5.

soltanto dei punti tripli, doppî e semplici, in numero di α, β, γ rispettivamente, in virtù delle quali molteplicità sarà individuata e razionale. Avremo pertanto le equazioni:

$$(r_1 - 1)(r_1 - 2) = (r_1 - 3)(r_1 - 4) + 6\alpha + 2\beta,$$

$$r_1(r_1 + 3) = (r_1 - 3)(r_1 - 2) + 12\alpha + 6\beta + 2\gamma,$$

ossia:

(1) $$2r_1 = 3\alpha + \beta + 5,$$

(2) $$4r_1 = 6\alpha + 3\beta + \gamma + 3,$$

dalle quali otteniamo:

(3) $$\beta + \gamma \leqq 7.$$

Dalle (1) e (2) si deduce inoltre:

$$\alpha + \beta = \frac{2(r_1 - \gamma)}{3} + 3;$$

ma per la (3) si ha $\gamma \leqq 7$, e per ipotesi $r_1 \geqq 8$, quindi $r_1 - \gamma \geqq 1$, da cui segue $\alpha + \beta \geqq 5$. Supponendo allora che sia $\gamma > 0$, cioè che esistano dei punti fondamentali semplici per C_1, e chiamando A uno di essi, la sua curva corrispondente C_A, passando semplicemente per il punto fondamentale di massima molteplicità, sarà una conica od una retta. Consideriamo il primo caso e facciamo anzitutto l'ipotesi che la conica C_A passi per A: essa contiene poi, oltre al punto 1, altri tre punti fondamentali, di cui, essendo $\alpha + \beta \geqq 5$, almeno uno non è fra gli $\alpha + \beta$ punti, in cui C_1 ha un punto triplo o doppio, e che sono perciò almeno tripli per l'involuzione. Ciò è assurdo, perchè quella conica passa per il punto A, che per l'involuzione ha molteplicità minore. Adunque la conica C_A non passa per A, ma contiene, oltre ad 1, quattro punti fondamentali, di cui nessuno, per la ragione ora detta, può trovarsi fra i γ punti semplici di C_1. La C_1 avrà pertanto τ punti tripli e δ punti doppî fra questi quattro punti, e sarà:

$$2r_1 = r_1 - 3 + 3\tau + 2\delta,$$

da cui, essendo $\tau + \delta = 4$, segue $r_1 = 5 + \tau$. Ma $\tau \leqq 4$, quindi $r_1 \leqq 9$. Sono perciò possibili i soli due casi:

$$r_1 = 9,\ \tau = 4,\ \delta = 0; \qquad r_1 = 8,\ \tau = 3,\ \delta = 1.$$

Nel primo caso la C_1 è del tipo

$$(1^6 2^3 3^3 4^3 5^3 6^2 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)_9,$$

e se 7 è il punto che sopra chiamammo A, la sua conica corrispondente è $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)_2$. I punti 8, 9, 10, 11, 12 debbono necessariamente essere fondamentali semplici, il che è assurdo perchè soltanto le rette $(12)_1$, $(13)_1$, $(14)_1$, $(15)_1$ possono essere fondamentali.

Nel secondo caso invece la C_1 è del tipo

$$(1^5 2^3 3^3 4^3 5^2 6^2 7\ 8\ 9\ 10\ 11)_8:$$

i punti 7, 8, 9, 10, 11 non possono essere che semplici o doppî per la involuzione, e nella prima ipotesi hanno per corrispondente la retta che unisce 1 con uno dei punti 2, 3, 4, nella seconda la conica passante per 1, 2, 3, 4 e per 5 o per 6. Possiamo supporre che per es. ai punti 7 ed 8 corrispondano rispett. le coniche $(1\ 2\ 3\ 4\ 6)_2$, $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)_2$, ed ai punti 9, 10, 11 le rette $(12)_1$, $(13)_1$, $(14)_1$, rispett. La curva corrispondente al punto 5, potendo contenere soltanto i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, non può essere che la cubica $(1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8)_3$; analogamente al punto 6 corrisponde la cubica $(1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3$. Riflettendo allora che le curve corrispondenti ai punti 1 e 7 non incontrano le curve della rete omaloidica fuori dei punti fondamentali, si ottengono le equazioni:

$$8n = 3\sum_{i=2}^{i=4} r_i + 59,$$

$$2n = \sum_{i=2}^{i=4} r_i + 11,$$

da cui $n = 13$. Ne segue che i punti 2, 3, 4 sono quintupli per la

trasformazione. Applicando allora una nota formola della teoria delle involuzioni piane (*), si ottiene:

$$24\nu + 8\lambda_1 = 5\left(30 - \sum_{i=2}^{i=4}\lambda_i\right),$$

da cui risulta che la differenza $30 - \sum_{i=2}^{i=4}\lambda_i$ è divisibile per 8. Ora si trova facilmente che ciascuno dei punti 2, 3 e 4 deve essere o triplo o quintuplo per le curve Ω, epperò $\sum_{i=2}^{i=4}\lambda_i$ deve avere uno dei valori o, 2, 4, 6. Sarà dunque $\sum_{i=2}^{i=4}\lambda_i = 6$, epperò la relazione precedente diviene:

$$3\nu + \lambda_1 = 15,$$

dalla quale, dovendo essere $\alpha_{11} - \lambda_1$ un numero pari non negativo, si ricava l'unica soluzione $\nu = 4$, $\lambda_1 = 3$. *Ad essa corrisponde la involuzione III di 4ª classe e di 2ª specie*, già determinata dal sig. Martinetti (**).

Concludiamo pertanto che, *tranne per l'involuzione di 4ª classe ora trovata, ognuno dei γ punti semplici di C_1 è semplice anche per l'involuzione; la sua retta corrispondente deve unire il punto 1 con uno degli α punti tripli di C_1*, epperò avremo:

$$(4) \qquad \alpha \geqq \gamma.$$

Di qui risulta $\alpha > 0$; invero se fosse $\alpha = 0$, sarebbe $\gamma = 0$, e dalle (3) ed (1) seguirebbe l'assurdo $r_1 = 6$.

2. Torniamo all'equazione (3) e consideriamone la soluzione $\beta = 0$,

(*) Bertini, *Sopra alcune involuzioni piane* (Rend. del R. Istituto Lombardo serie II, vol. XVI, 1883; nº 5, formola 2ª).

(**) *Le involuzioni di 3ª e 4ª classe* (Annali di Matem., serie II, t. XII, pag. 87, nº 17).

$\gamma = 7$; dalla (4) segue $\alpha \geqq 7$, e quindi dalla (1) $r_1 \geqq 13$. Una delle formole fondamentali nella teoria delle trasformazioni Cremoniane dà:

$$r_1 + \sum_{i=2}^{i=\alpha+1} r_i + 7 = 3(n-1),$$

ed inoltre la considerazione della curva C_1 fornisce:

$$n r_1 = r_1(r_1 - 3) + 3\sum_{i=2}^{i=\alpha+1} r_i + 7.$$

Da queste due equazioni eliminando $\sum_{i=2}^{i=\alpha+1} r_i$, e dividendo la risultante per $r_1 - 9$, che non è zero, si ottiene:

$$n = r_1 + 3 + \frac{4}{r_1 - 9}.$$

Poichè $r_1 \geqq 13$, si ricava di qui l'unica soluzione $r_1 = 13$, $n = 17$, e quindi $\alpha = 7$. La C_1 è dunque del tipo

$$(1^{10} 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3 7^3 8^3\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15)_{13},$$

ed i punti $2, 3, \ldots, 8$ sono quadrupli per la trasformazione. I punti $9, 10, \ldots, 15$ sono semplici, mentre i punti $2, 3, \ldots, 8$ sono tripli per le Ω, laonde, in virtù della formola richiamata alla fine del n°. prec., abbiamo:

$$32\nu + 13\lambda_1 = 244,$$

la quale ammette l'unica soluzione $\nu = 6$, $\lambda_1 = 4$. *Siamo dunque condotti ad un'involuzione di* 6^a *classe avente il seguente sistema per le* Ω:

$$(A) \qquad (\Omega) \equiv (1^9_6 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3 7^3 8^3\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15)_{13}.$$

Essa appartiene ad un tipo generale di involuzioni studiato da me in un

lavoro recentemente pubblicato (*), ed è la più generale fra quelle che di là si ottengono ponendo $k = 3$.

3. Rimangono ora da considerare i casi, nei quali è $\beta > 0$. In virtù della relazione fondamentale, a cui abbiamo ricorso al principio del n°. preced., si ha:

$$r_1 + \sum_{i=2}^{i=\alpha+1} r_i + \sum_{i=\alpha+2}^{i=\alpha+\beta+1} r_i + \gamma = 3(n-1); \tag{5}$$

inoltre, considerando la curva C_1, risulta:

$$n r_1 = r_1(r_1 - 3) + 3\sum_{i=2}^{i=\alpha+1} r_i + 2\sum_{i=\alpha+2}^{i=\alpha+\beta+1} r_i + \gamma, \tag{6}$$

e da queste equazioni si deduce:

$$\sum_{i=\alpha+2}^{i=\alpha+\beta+1} r_i = r_1\,(r_1 - n - 6) + 9\,(n-1) - 2\gamma. \tag{7}$$

Ora la curva corrispondente ad uno qualunque dei β punti doppi di C_1 è almeno del 3° ordine, epperò:

$$\sum_{i=\alpha+2}^{i=\alpha+\beta+1} r_i \geqq 3\beta,$$

da cui, avuto riguardo alle (3) e (7), otteniamo:

$$r_1(r_1 - n - 6) + 9n \geqq 23 + \beta. \tag{8}$$

Della (3) prendiamo ora a considerare la soluzione $\beta = 1$, $\gamma = 6$; dalla (4) segue $\alpha \geqq 6$, epperò, per la (1), sarà $r_1 \geqq 12$. Se allora

---

(*) *Ricerche sulle trasformazioni piane univoche involutorie ecc.* (Annali di Matematica, serie II, t. XVI, pag. 206, ni. 11, 12 e 13 della Prima Parte).

nella (8) poniamo $\beta = 1$, e dividiamo per $r_1 - 9$, risulta:

$$n \leqq r_1 + 3 + \frac{3}{r_1 - 9},$$

la quale mostra come non può essere $r_1 \geqq 13$. Invero in tale ipotesi se ne dedurrebbe $n - r_1 \leqq 3$, epperò tutti i punti fondamentali, all'infuori di 1, sarebbero al più tripli per l'involuzione, cosa assurda, giacchè gli α punti tripli di C_1 sono almeno quadrupli per essa. Si ha dunque $r_1 = 12$, e quindi $\alpha = 6$: l'ultima formola dà $n \leqq 16$, ed essendo anche $n \geqq 16$, sarà $n = 16$. I sei punti tripli di C_1 sono quadrupli per l'involuzione e tripli per le Ω; il punto doppio di C_1 è invece triplo tanto per l'involuzione, quanto per le Ω. Allora la formola, che già applicammo nei n[i]. 1 e 2, dà:

$$2\lambda_1 + 5\nu = 36,$$

da cui, ricordando che λ_1 deve essere numero dispari non superiore a 9, si ricava l'unica soluzione $\nu = 6$, $\lambda_1 = 3$. La retta che unisce il punto 1 col punto doppio di C_1 è unita, e contiene quindi un punto unito; *abbiamo dunque un'involuzione di 6ª classe, di cui le Ω formano il sistema* (A) trovato alla fine del n° precedente.

4. Nelle involuzioni, che ancora restano da esaminare, abbiamo $\beta \geqq 2$, epperò dalla (8) si deduce:

$$(9 - r_1)n \geqq 25 - r_1^2 + 6r_1,$$

ossia, quando si supponga $r_1 > 9$:

$$n \leqq r_1 + 3 + \frac{2}{r_1 - 9} \qquad (\text{per } r_1 > 9). \tag{9}$$

Come si fece nel n° preced., di qui si conclude che *deve essere* $r_1 \leqq 11$.

Dalle (5) e (6) si deduce altresì:

$$\sum_{i=2}^{i=\lambda+1} r_i = r_1(n - r_1 + 5) - 6(n - 1) + \gamma.$$

Ma dalla (9) segue che, quando sia $r_1 > 9$, ogni punto fondamentale, all'infuori di 1, è al più quintuplo per l'involuzione, quindi sarà:

$$(10) \qquad r_1(n - r_1 + 5) - 6(n - 1) + \gamma \leqq 5\,\alpha \qquad (\text{per } r_1 > 9).$$

5. È facile dimostrare che *debbono effettivamente esistere dei punti fondamentali semplici, cioè che deve essere* $\gamma > 0$. Se infatti fosse $\gamma = 0$, la (3) darebbe $\beta = 7$, e quindi la (1):

$$2r_1 = 3\alpha + 12.$$

Essendo $r_1 \geqq 8$, di qui segue che α è un numero pari almeno uguale a 2; essendo poi anche $r_1 \leqq 11$, dalla medesima relazione scende $\alpha \leqq 3$, epperò si ha $\alpha = 2$, e quindi $r_1 = 9$. Allora la (7) dà la relazione:

$$\sum_{i=4}^{i=10} r_i = 18,$$

la quale è assurda, poichè ciascuno dei sette punti doppi di C_1 è almeno triplo per l'involuzione.

6. Poniamo nella (1) in luogo di r_1 successivamente i valori 8, 9, 10, 11: risolvendo l'equazione che ne risulta, e ricordando le (3) e (4), otteniamo le sole seguenti soluzioni:

(I)	$r_1 = 8$,	$\alpha = 2$,	$\beta = 5$,	$\gamma = 2$;
(II)	$r_1 = 9$,	$\alpha = 3$,	$\beta = 4$,	$\gamma = 3$;
(III)	$r_1 = 10$,	$\alpha = 4$,	$\beta = 3$,	$\gamma = 4$;
(IV)	$r_1 = 11$,	$\alpha = 5$,	$\beta = 2$,	$\gamma = 5$;
(V)	$r_1 = 10$,	$\alpha = 3$,	$\beta = 6$,	$\gamma = 1$;
(VI)	$r_1 = 11$,	$\alpha = 4$,	$\beta = 5$,	$\gamma = 2$.

Si dimostra però agevolmente che i due ultimi casi sono impossibili. Invero nel caso (V) la (10) dà $n \leqq 14$, e poichè deve anche essere $n \geqq 14$, avremo $n = 14$. I tre punti tripli di C_1 sono dunque quadrupli per l'involuzione, il che è assurdo, poichè C_1 passa semplice-

mente per un solo punto fondamentale. Nella soluzione (VI) la (9) fornisce $n \leqq 15$, ed avendosi altresì $n \geqq 15$, sarà $n = 15$, quindi i quattro punti tripli di C_1 saranno quadrupli per l'involuzione, cosa assurda poichè $\gamma = 2$.

Veniamo ora a considerare le altre quattro soluzioni.

7. (I) — Siccome le curve corrispondenti ai cinque punti doppî di C_1 non hanno che punti doppi e semplici, le curve corrispondenti ai due punti 2 e 3, tripli per C_1, non possono aver punti tripli se non nei punti 1, 2 e 3. D'altra parte ciascuna di queste curve, poichè le rette $(12)_1$ e $(13)_1$ sono fondamentali, deve passare per 2 e 3 collo stesso numero di rami; inoltre entrambe hanno in 1 un punto triplo e contengono al più nove punti fondamentali, per uno almeno dei quali passano semplicemente. Esse sono adunque del 4° o del 5° ordine, e nel primo caso abbiamo $n = 12$, nel secondo $n = 13$.

Se $n = 12$, la (7) dà:

$$\sum_{i=4}^{i=8} r_i = 15,$$

da cui segue che i punti 4, 5, 6, 7, 8 sono tripli per la trasformazione. I punti 2 e 3 sono tripli per le Ω, mentre i punti 4, 5, 6, 7, 8 possono essere doppî o tripli per esse, di modo che $\sum_{i=4}^{i=8} \lambda_i$ può avere uno o l'altro dei tre valori 0, 2, 4. La formola già più volte applicata ci dà:

$$8\lambda_1 + 3\sum_{i=4}^{i=8} \lambda_i + 22\nu = 124,$$

da cui, ricordando che λ_1 deve essere dispari e al più uguale a 5, si traggono le due sole soluzioni:

$$\sum_{i=4}^{i=8} \lambda_i = 4, \qquad \nu = 4, \qquad \lambda_1 = 3;$$

$$\sum_{i=4}^{i=8} \lambda_i = 2, \qquad \nu = 5, \qquad \lambda_1 = 1.$$

La prima fornisce l'involuzione V di 4^a classe e 2^a specie, determinata dal sig. Martinetti al n° 28 del lavoro citato; *la seconda soluzione dà l'involuzione IV di 5^a classe e 2^a specie,* determinata già da me nel n° 27 della Seconda Parte della Memoria citata.

Se invece $n = 13$, la (7) dà:

$$\sum_{i=4}^{i=8} r_i = 16,$$

per cui quattro dei punti doppî di C_1, che diremo 5, 6, 7, 8, sono tripli, ed il rimanente 4 è quadruplo per l'involuzione. Il punto 4 è triplo per le Ω; invece i punti 2 e 3, tripli per C_1, sono tripli o quintupli (con due direzioni fisse) per esse; i punti 5, 6, 7, 8 sono doppî o tripli per le medesime curve. Adunque tanto $\sum_{i=2}^{i=3} \lambda_i$ quanto $\sum_{i=5}^{i=8} \lambda_i$ possono avere uno o l'altro dei valori 4, 2, 0. Ora abbiamo:

$$8\lambda_1 + 5 \sum_{i=2}^{i=3} \lambda_i + 3 \sum_{i=5}^{i=8} \lambda_i + 24\nu = 152,$$

da cui si ricavano le sole soluzioni:

$$\sum_{i=2}^{i=3} \lambda_i = \sum_{i=5}^{i=8} \lambda_i = 4, \qquad \nu = 4, \qquad \lambda_1 = 3;$$

$$\sum_{i=2}^{i=3} \lambda_i = \sum_{i=5}^{i=8} \lambda_i = 2, \qquad \nu = 4, \qquad \lambda_1 = 5;$$

$$\sum_{i=2}^{i=3} \lambda_i = \sum_{i=5}^{i=8} \lambda_i = 0, \qquad \nu = 6, \qquad \lambda_1 = 1.$$

La prima soluzione dà l'involuzione IV di 4^a classe e 2^a specie, stabilita dal sig. Martinetti nel n° 27, l. c. La seconda è assurda, giacchè la curva corrispondente ad uno dei punti 2 e 3 taglierebbe le Ω in un solo, anzichè in tre punti variabili. L'ultima soluzione è pure assurda; infatti la rete omaloidica sarebbe:

$$(1^8 2^5 3^5 4^4 5^3 6^3 7^3 8^3 9\ 10)_{13},$$

ed esisterebbero tre punti uniti 11, 12, 13. Poichè la cubica $(1^2 2 3 4 5 6 7)_3$ è fondamentale ed ha per corrispondente il punto 8, la cubica $(1^2 2 3 5 6 7 11)_3$ non passa certamente per 4; ad essa nella involuzione corrisponde una curva $(1^2 2^2 3^2 4 5 6 7)_4$, la quale tocca inoltre la cubica data nel punto 11; questa si spezza dunque nella cubica data ed in una retta la quale deve contenere i punti 2, 3, 4. Ora questo non può aver luogo, poichè tale retta si staccherebbe da tutte le curve della rete omaloidica.

8. (II) — In questo caso la (7) dà:

$$\sum_{i=5}^{i=8} r_i = 12,$$

epperò i quattro punti doppî di C_1 sono tripli per l'involuzione. Inoltre, poichè vi sono otto soli punti fondamentali non semplici, e la curva corrispondente ad uno qualunque dei tre punti tripli 2, 3, 4 di C_1 deve contenere uno dei tre punti fondamentali semplici, essa contiene al più nove punti fondamentali, e può aver punti multipli soltanto nei punti 1, 2, 3 e 4. Questa curva è pertanto del 4° o del 5° ordine, ed n ha rispett. i valori 13 e 14.

Se $n = 13$, i punti 2, 3 e 4 sono tripli per le Ω, mentre la somma $\sum_{i=5}^{i=8} \lambda_i$ può avere uno o l'altro dei valori 4, 2, 0. Abbiamo quindi:

$$9\lambda_1 + 3\sum_{i=5}^{i=8} \lambda_i + 24\nu = 144,$$

da cui si traggono le soluzioni:

$$\sum_{i=5}^{i=8} \lambda_i = 4, \qquad \nu = 4, \qquad \lambda_1 = 4;$$

$$\sum_{i=5}^{i=8} \lambda_i = 2, \qquad \nu = 5, \qquad \lambda_1 = 2;$$

$$\sum_{i=5}^{i=8} \lambda_i = 0, \qquad \nu = 6, \qquad \lambda_1 = 0.$$

La prima dà l'involuzione II di 4^a classe e 2^a specie (*); *la seconda dà l'involuzione III di 5^a classe e 2^a specie* (**); nell'ultima le rette $(15)_1$, $(16)_1$, $(17)_1$, $(18)_1$ sono unite, epperò ciascuna contiene un punto unito. *Si ha dunque un'involuzione di 6^a classe, di cui le Ω formano il sistema (A),* già trovato nei n.i 2 e 3.

Se $n = 14$, abbiamo:

$$9\lambda_1 + 5\sum_{i=2}^{i=4}\lambda_i + 3\sum_{i=5}^{i=8}\lambda_i + 26\nu = 182,$$

dove la somma $\sum_{i=2}^{i=4}\lambda_i$ è suscettibile dei valori 0, 2, 4, 6, e la somma $\sum_{i=5}^{i=8}\lambda_i$ dei valori 0, 2, 4. Si hanno pertanto le soluzioni:

$$\sum_{i=2}^{i=4}\lambda_i = 6, \quad \sum_{i=5}^{i=8}\lambda_i = 4, \quad \nu = 4, \quad \lambda_1 = 4;$$

$$\sum_{i=2}^{i=4}\lambda_i = 2, \quad \sum_{i=5}^{i=8}\lambda_i = 2, \quad \nu = 5, \quad \lambda_1 = 4;$$

$$\sum_{i=2}^{i=4}\lambda_i = 4, \quad \sum_{i=5}^{i=8}\lambda_i = 2, \quad \nu = 6, \quad \lambda_1 = 0;$$

$$\sum_{i=2}^{i=4}\lambda_i = 0, \quad \sum_{i=5}^{i=8}\lambda_i = 0, \quad \nu = 7, \quad \lambda_1 = 0.$$

Alla prima corrisponde l'involuzione I di 4^a classe e 2^a specie (***); la seconda e la terza sono assurde, poichè per esse le Ω avrebbero risp. 119 e 161, anzichè 111 e 157 intersezioni fisse. *L'ultima soluzione dà un'involuzione di 7^a classe, priva di curva punteggiata unita*, e che, per quanto è a mia cognizione, non fu peranco osservata: le curve Ω sono:

$$(\Omega) \equiv (1_6^9\, 2_2^5\, 3_2^5\, 4_2^5\, 5^3\, 6^3\, 7^3\, 8^3\, 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15)_{15}.$$

(*) Martinetti, l. c., n° 27.
(**) Berzolari, l. c., Seconda Parte, n° 26.
(***) Martinetti, l. c., n° 26.

L'involuzione possiede

un punto nonuplo	1,
tre punti quintupli	2, 3, 4,
quattro punti tripli	5, 6, 7, 8,
tre punti semplici	9, 10, 11,
quattro punti uniti	12, 13, 14, 15;

la jacobiana è così composta:

$$J=(1^6 2^3 3^3 4^3 5^2 6^2 7^2 8^2 9\ 10\ 11)_9^1 (1^3 2^2 3^2 4^2 5\ 6\ 7\ 8\ 9)_5^2 (1^3 2^2 3^2 4^2 5\ 6\ 7\ 8\ 10)_5^3$$

$$(1^3 2^2 3^2 4^2 5\ 6\ 7\ 8\ 11)_5^4 (1^2 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8)_3^5 (1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8)_3^6 (1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8)_3^7$$

$$(1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3^8 (12)_1^9 (13)_1^{10} (14)_1^{11}.$$

I sei fasci di cubiche, aventi in 1 un punto doppio e passanti per 2, 3 e 4 e per due dei punti tripli 5, 6, 7, 8, sono uniti, e servono a costruire l'involuzione. Questa costruzione, che si dimostra facilmente potersi invertire, si può eseguire in 12 modi, scegliendo due di quei fasci, che differiscano per un solo punto base. Per es., assumendo i due fasci in involuzione $(1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 6)_3$, $(1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 7)_3$, nel primo sono corrispondenti le coppie di cubiche:

$$(1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3, (1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8)_3;\quad (1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 9)_3, (12)_1 (1\ 3\ 4\ 5\ 6)_2;$$

$$(1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 10)_3, (13)_1 (1\ 2\ 4\ 5\ 6)_2;\ (1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 11)_3, (14)_1 (12\ 3\ 5\ 6)_2,$$

e nel secondo le coppie di cubiche:

$$(1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 6)_3, (1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8)_3;\quad (1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 9)_3, (12)_1 (13\ 4\ 5\ 7)_2;$$

$$(1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 10)_3, (13)_1 (1\ 2\ 4\ 5\ 7)_2;\ (1^2 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 11)_3, (14_1)(1\ 2\ 3\ 5\ 7)_2.$$

9. (III)—La (9) dà $n \lesseqgtr 15$, e dovendo essere inoltre $n \geqq 14$, sarà $n = 14$, oppure $n = 15$. Il secondo caso è impossibile, poichè la (7) darebbe l'assurdo

$$\sum_{i=6}^{i=8} r_i = 8.$$

Sarà dunque $n = 14$. La solita equazione fornisce:

$$10\lambda_1 + 3\sum_{i=6}^{i=8}\lambda_i + 26\nu = 166;$$

ma $\sum_{i=6}^{i=8}\lambda_i$ può avere uno o l'altro dei valori 2, 0, epperò si ottengono le due soluzioni:

$$\sum_{i=6}^{i=8}\lambda_i = 2, \qquad \nu = 5, \qquad \lambda_1 = 3;$$

$$\sum_{i=6}^{i=8}\lambda_i = 0, \qquad \nu = 6, \qquad \lambda_1 = 1.$$

La prima dà l'involuzione II di 5^a *classe e* 2^a *specie* (*); nella seconda le tre rette $(16)_1$, $(17)_1$, $(18)_1$ sono unite e ciascuna contiene quindi un punto unito; *si ha per tal modo un'involuzione di* 6^a *classe, di cui le* Ω *formano il sistema* (A), già più volte considerato.

10. (IV)—La (9) dà $n \leqq 15$, e dovendo anche essere $n \geqq 15$, sarà $n = 15$. La (7) dà:

$$\sum_{i=7}^{i=8} r_i = 6,$$

quindi i due punti doppî di C_1 sono tripli per l'involuzione. Abbiamo allora:

$$11\lambda_1 + 3\sum_{i=7}^{i=8}\lambda_i + 28\nu = 190;$$

ma $\sum_{i=7}^{i=8}\lambda_i$ è suscettibile dei due valori 2, 0, quindi si ottengono le due soluzioni:

$$\sum_{i=7}^{i=8}\lambda_i = 2, \qquad \nu = 5, \qquad \lambda_1 = 4;$$

$$\sum_{i=7}^{i=8}\lambda_i = 0, \qquad \nu = 6, \qquad \lambda_1 = 2.$$

(*) Berzolari, l. c., n° 25 della Seconda Parte.

Alla prima corrisponde l'involuzione I di 5ª classe e 2ª specie (*) ; nella seconda le rette $(17)_1$ ed $(18)_1$ sono unite, e quindi ciascuna contiene un punto unito; *si ha pertanto un' involuzione di 6ª classe, le cui* Ω *formano il sistema* (A).

11. Dal nº 10, pag. 206 della Prima Parte del mio lavoro più volte citato si desume che le cinque involuzioni di 6ª classe (con 0, 1, 2, 3 e 4 allineamenti del punto 1 con altri due punti fondamentali), che trovammo man mano nella discussione precedente, sono, fra quelle di 6ª classe, le sole che appartengano alla specie considerata, cioè le sole che abbiano il sistema (A) di curve Ω.

Da tutto ciò che precede si ricava pertanto la seguente proposizione:

Se un'involuzione possiede un punto fondamentale r-plo, per il quale la curva corrispondente passi con $r - 3$ *rami, e si suppone* $r \geqq 8$, *l'involuzione è fra le quindici seguenti, che si possono distinguere in quattro gruppi*:

1) *Involuzioni I, II, III, IV e V di 4ª classe e 2ª specie;*

2) *Involuzioni I, II, III, e IV di 5ª classe e 2ª specie;*

3) *Le cinque possibili involuzioni di 6ª classe, aventi il sistema* (A) *di curve* Ω;

4) *Un'involuzione di 7ª classe, priva di curva punteggiata unita.*

In altri termini:

Se un'involuzione diversa dalle quindici ora enumerate possiede un punto fondamentale r-plo, per il quale la curva corrispondente passi con $r - 3$ *rami, deve essere* $r \leqq 7$.

Pavia, 2 marzo 1889.

LUIGI BERZOLARI.

(*) Berzolari, l. c., nº 24 della Seconda Parte.

SUR UN THÉORÈME RELATIF À L'HESSIENNE D'UNE FORME BINAIRE;

par M. le prof. **P.-H. Schoute**, à Groningue.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. G.-B. Guccia).

Adunanza del 10 marzo 1889.

. . . .

A l'aide d'une formule remarquable, qui exprime la Hessienne H du produit $a_x^m b_x^n$ de deux formes binaires en fonction des covariants de ces deux formes, M. F. Gerbaldi, de Rome, a démontré dans un des derniers fascicules de ces *Rendiconti* (*) le théorème suivant:

Si toutes les racines d'une équation binaire $a_x^n = 0$ *sont réelles et distinctes, la Hessienne correspondante* H *est négative pour toutes les valeurs de la variable et l'équation* $H = 0$ *n'admet donc pas de racines réelles; si parmi les racines supposées toujours réelles, il se trouve une racine multiple d'ordre* r, *l'équation* $H = 0$ *a une racine multiple d'ordre* $2(r-1)$ *en ce point et* H *est négative en dehors de ce point. Si* H *est positive pour toutes les valeurs de la variable, toutes les racines des deux équations* $a_x^n = 0$, $H = 0$ *sont imaginaires.*

Peut-être la démonstration suivante, de la plus grande partie de ce théorème, pourra-t-elle intéresser les lecteurs des *Rendiconti.*

(*) Tome III (1889), fasc. 1 (janvier-février), p. 22-26.

1. *Si le support l des n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de l'équation binaire $a_x^n = 0$ supposés réels et distincts est divisé par ces points dans les n segments $A_1 A_2 = s_1$, $A_2 A_3 = s_2$, $\ldots$, $A_n \infty A_1 = s_n$ et que l'on détermine le premier système polaire de ces n points par rapport à un point quelconque P du segment s_k comme pôle, chacun des autres segments contiendra un de ces $n - 1$ points. Et si P va coïncider avec A_k, le point du système polaire, qui se trouvait sur s_{k-1}, coïncide également avec A_k.*

Ce théorème se démontre d'une manière bien simple. En effet, l'équation

$$\sum_1^n \frac{PA_i}{XA_i} = 0$$

du système polaire en question mise sous la forme entière

$$\sum PA_1 . \; XA_2 . \; XA_3 \ldots XA_n = 0$$

se réduit dans les deux hypothèses $X = A_i$ et $X = A_{i+1}$ aux termes uniques

$$PA_i . \; A_i A_1 . \; A_i A_2 \ldots A_i A_{i+1} \ldots A_i A_n ,$$

$$PA_{i+1} . \; A_{i+1} A_1 . \; A_{i+1} A_2 \ldots A_{i+1} A_i \ldots A_{i+1} A_n ,$$

dont les facteurs correspondants ont le même signe à l'exception du couple $A_i A_{i+1}$ et $A_{i+1} A_i$ pour $i \neq k$ et des deux couples PA_i et PA_{i+1}, $A_i A_{i+1}$ et $A_{i+1} A_i$ pour $i = k$. Donc ces deux termes admettent des signes contraires pour $i \neq k$ et des signes égaux pour $i = k$. Cela prouve que chacun des segments contient un nombre impair de points du système formé par le point P et son premier système polaire. Et comme le nombre total de ces points est n, chaque segment en contient un seul.

Quand P se meut vers A_k de manière à coïncider avec ce point, le seul terme du premier membre de l'équation, qui tout d'abord ne s'annulait pas pour $X = A_k$, s'annulle également et A_k fait partie du système polaire. Dans ce cas les deux points du système composé de P et de son système polaire situés sur les deux segments s_{k-1} et s_k coïncident en A_k.

Le théorème que nous venons de démontrer est l'extension projective du *théorème de Rolle*, qui en forme le cas particulier lorsque le pôle P se trouve à l'infini. Il contient le germe de la théorie entière des systèmes polaires, dont nous rappelons les propriétés suivantes:

a) Si Q fait partie du k-ième système polaire de P par rapport à a_x^n, P fait partie du $(n-k)$-ième système polaire de Q par rapport à a_x^n (équation de définition).

b) Un point multiple A_r d'ordre r de a_x^n fait partie $(r-1)$-fois du premier système polaire d'un point quelconque P, $(r-2)$-fois du second, etc.

c) Un point multiple A_r d'ordre r de a_x^n fait partie r-fois de chaque système polaire de A_r, dont le nombre des points n'est pas inférieur à r, tandis que ces systèmes d'ordre inférieur sont indéterminés.

d) Si Q est un point double du k-ième système polaire de P, P est un point double du $(n-k-1)$-ième système de Q.

e) La Hessienne $H=0$ détermine les points doubles Q des premiers systèmes polaires, savoir les points Q dont les systèmes polaires du second ordre se composent d'un point double.

2. *Si toutes les racines de $a_x^n=0$ sont réelles et distinctes l'équation $H=0$ a toutes ses racines imaginaires, de manière que la forme $H=0$ est d'ordre pair et qu'elle a le même signe pour toutes les valeurs réelles de la variable.*

En effet, par ce qu'il a été dit dans le n° précédent, l'hypothèse faite par rapport aux racines de a_x^n est contraire à la coïncidence de deux points faisant partie d'un même système polaire d'ordre quelconque; donc etc.

3. *La forme H prend des valeurs du même signe pour les racines réelles de $a_x^n=0$ (même lorsque cette équation admet des couples de racines imaginaires conjuguées). Ainsi, si pour toutes les valeurs de la variable, H prend le signe contraire, on doit en conclure que l'équation a toutes ses racines imaginaires.*

Supposons qu'à l'aide de variations continues des coefficients on transforme l'equation $a_x^n=0$, dont les racines sont réelles et distinctes, en une autre équation donnée $a_x'^n=0$ dont plusieurs couples de racines

sont imaginaires conjugués, et représentons par $\overline{a}_x^n$ une forme intermédiaire. Dans ce procédé le nombre des racines réelles ne subit des changements qu'au moment où $\overline{a}_x^n = 0$ a deux racines égales, qui de réelles qu'elles étaient deviennent imaginaires conjuguées. Et ce principe évident s'applique de même à l'équation $H = 0$, qui se transforme en $H' = 0$ en passant par les formes intermédiaires $\overline{H} = 0$.

Supposons que les variations des coefficients de $a_x^n = 0$ se fassent de manière que des couples de racines réelles deviennent imaginaires sans que, en passant, des autres couples de racines imaginaires redeviennent réelles. Cela est possible d'une infinité de manières, parce que chaque combinaison de p couples de racines conjuguées avec $n - 2p$ racines réelles peut figurer comme les racines d'une équation d'ordre n à coefficients réels. Faisons attention à ce qui arrive lorsque une des racines de $\overline{H} = 0$ coïncide avec une des racines de $\overline{a}_x^n = 0$. Soit R le point correspondant à cette racine commune. Le système polaire du second ordre de R est un point double parce que R est un point de $\overline{H} = 0$. Et ce système contient le point R lui-même, parce que le pôle R est un point de $\overline{a}_x^n = 0$. Donc ce système polaire se compose de R compté deux fois. Mais cela n'est possible que lorsque R est un point double de $\overline{a}_x^n = 0$. Ainsi l'on trouve qu'un point réel de $\overline{a}_x^n = 0$ correspond toujours à une valeur de $\overline{H}$ qui a le même signe. Car au moment où cette valeur se prépare à changer de signe en devenant zéro (*) le point en question s'esquive en devenant imaginaire, etc. (**)

(*) Il va sans dire que le changement de signe de $\overline{H}$ en un point de $\overline{a}_x^n = 0$ en passant par infiniment grand s'exclut sans peine. Car, si les coordonnées homogènes x_1 et x_2 représentent des véritables distances, $\overline{H}$ ne peut devenir infini qu'au point infiniment éloigné de l et l'on peut éviter ce point dans la transformation de $a_x^n = 0$.

(**) Comme on sait on a le théorème suivant: *Quand* $a_x^n = 0$ *a une racine double en* R, $H = 0$ *a aussi une racine double en* R. *Et quand pour* $a_x^n = 0$ *cette racine double est la transition de deux racines réelles à deux racines imaginaires, elle forme réciproquement la transition de deux racines imaginaires à deux racines réelles pour* $H = 0$.

4. *Si H est le déterminant des dérivées partielles du second ordre de a_x^n le signe en question est le signe négatif.*

En effet, la supposition que a_x^n soit remplacé par $b_x^{n-1} x_1$ fait trouver pour la valeur de H au point $x_1 = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2(n-1) b_1 b_2^{n-2} x_2^{n-2}, & (n-1) b_2^{n-1} x_2^{n-2} \\ (n-1) b_2^{n-1} x_2^{n-2}, & 0 \end{vmatrix} = -(n-1)^2 b_2^{n-1} x_2^{2n-4}.$$

Groningue, 21 février 1889.

P.-H. SCHOUTE.

LA TRASFORMAZIONE QUADRATICA (2, 2).

Nota di **P. Visalli**, in Reggio Calabria.

Adunanza del 14 aprile 1889.

1. Sieno dati due piani π, π' ed esista fra essi una corrispondenza tale che ad una coppia di punti (detti congiunti) di un piano corrisponda una coppia di punti dell'altro piano e reciprocamente; e che ad una retta qualunque di un piano, per es. di π, corrisponda in π' una conica, luogo delle coppie di punti congiunti corrispondenti ai punti della retta.

Una retta di π' sega una conica dello stesso piano, corrispondente ad una retta dell'altro, in due punti; quindi:

Alle rette di π' corrispondono coniche di π.

Le coniche di un piano, corrispondenti alle rette dell'altro, non possono avere punti fissi in comune (punti fondamentali); perchè se dinotiamo con A_1, A due punti congiunti di π e con a, b due rette qualunque condotte per A_1 e per A, le coniche α', β', corrispondenti alle due rette devono segarsi in due punti congiunti corrispondenti alla coppia A_1, A ed in altri due punti congiunti corrispondenti al punto ab, e perciò non possono avere altri punti in comune.

Una retta a di π sega un'altra retta b e la curva congiunta a b (luogo dei punti congiunti ai punti di b) in tanti punti quante sono le coppie dei punti d'intersezione delle due coniche corrispondenti, quindi *la curva congiunta ad una retta è un'altra retta.*

Poichè sopra una retta non vi possono essere coppie di punti congiunti, ne segue che il punto comune a due rette congiunte è un punto doppio; cioè: *In ogni piano la curva doppia* (luogo dei punti congiunti infinitamente vicini) *è una retta.*

Sopra ogni conica di π (π') corrispondente ad una retta dell'altro piano, le coppie di punti congiunti formano un'involuzione e i due punti doppi sono i punti ove la conica sega la retta doppia [in direzione principale (*)]; quindi:

Alla retta doppia di ciascun piano corrisponde una conica, che è la curva limite dell'altro piano.

Anche sulla conica limite di ciascun piano le coppie di punti congiunti formano un'involuzione i cui punti doppi sono quelli ove la conica sega la retta doppia. I punti corrispondenti a ciascuno di questi punti comuni alla retta doppia ed alla conica limite, devono essere infinitamente vicini; cioè trovarsi nei punti d'intersezione della retta doppia e della conica limite dell'altro piano.

Una retta qualunque di un piano, per es. π, sega la retta doppia in due punti infinitamente vicini e non congiunti (cioè non la sega in generale in direzione principale); quindi la conica limite dell'altro piano π' è toccata in due punti congiunti dalla conica, che corrisponde alla retta; ed i punti ove questa conica sega la retta doppia sono i corrispondenti a quelli ove la retta data di π sega la conica limite dello stesso piano.

2. A tutte le rette di un fascio, che passano per uno stesso punto della retta doppia, corrispondono coniche, che formano un fascio e toccano la conica limite, corrispondente alla retta doppia, nei due punti congiunti corrispondenti al centro del fascio.

Agli altri fasci di rette di ciascun piano, che non hanno i centri sulla retta doppia, corrispondono nell'altro piano serie semplicemente infinite di coniche d'indice due.

Le coniche di ciascun piano, corrispondenti alle rette dell'altro,

(*) Vedi De Paolis, *Le trasformazioni piane doppie*. R. Accademia dei Lincei (1876-77).

devono toccare la conica limite in due punti congiunti e ciò equivale a tre condizioni; quindi esse formano un sistema doppiamente infinito e per due punti qualunque A, B di un piano ne passano due, quelle che corrispondono alle rette $A'B'$, $A'B'_1$, dell'altro piano.

3. Se due figure $A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots$, di $\pi(\pi')$ sono congiunte (A, A_1; B, B_1; C, C_1; ..., sono coppie di punti congiunti), poichè le rette congiunte AB, A_1B_1; AC, A_1C_1 ecc. si segano sulla retta doppia, le due figure sono omologiche e le rette, che uniscono le coppie di punti congiunti, passano per uno stesso punto $O(O')$ centro di omologia che è un punto doppio isolato del piano $\pi(\pi')$. Possiamo quindi dire:

In ciascun piano esiste una retta doppia ed un punto doppio fuori della retta.

Tutte le coppie di punti congiunti sono allineati col punto doppio $O(O')$ e divise armonicamente da O e dalla retta doppia; di modo che sopra una retta qualunque, condotta per $O(O')$ vi sono infinite coppie di punti congiunti che formano un'involuzione i cui punti doppi sono $O(O')$ ed il punto ove la retta sega (in direzione principale) la retta doppia.

Una retta r condotta per O è segata da una retta qualunque s in un punto; quindi la curva corrispondente ad r segherà la conica corrispondente ad s in due punti congiunti e perciò sarà una retta che passerà per O'; quindi:

Ad una retta passante per O corrisponde una retta passante per O' e reciprocamente.

I due fasci di raggi aventi i centri in O, O' sono proiettivi ed alle tangenti condotte da O alla conica limite di π corrispondono le tangenti condotte da O' alla conica limite di π'.

Al punto O corrisponde O'.

Il punto $O(O')$ è il polo della retta doppia rispetto a tutte le coniche di $\pi(\pi')$ che corrispondono alle rette dell'altro piano.

Una curva ψ d'ordine n del piano $\pi(\pi')$ sega una conica del sistema in $2n$ punti, a ciascuno dei quali corrispondono due punti situati sulla curva ψ' corrispondente a ψ e sulle due rette corrispondenti alla conica; quindi la curva ψ' è dell'ordine $2n$; e se ψ ha un punto r-plo in O la ψ' ne avrà uno $2r$-plo in O'.

4. Tutte le considerazioni fatte sin qui continuano a sussistere quando i due piani π e π' coincidono. In tal caso diremo prima e seconda figura anzichè piano π e π'.

Si presenta il problema di trovare il numero dei punti uniti; cioè dei punti che considerati appartenenti ad una figura coincidono con uno dei loro corrispondenti.

I due fasci di raggi aventi i centri in O ed O' sono projettivi; quindi il luogo del punto d'incontro di due raggi corrispondenti è una conica λ, che passa per O ed O' e tocca in questi punti i raggi che corrispondono al raggio OO' considerato come appartenente all'uno o all'altro fascio.

Alla conica λ, considerata come appartenente alla prima figura, corrisponde una curva λ' del quarto ordine avente un punto doppio in O'. Questa curva sega λ in sei punti, che sono uniti; perchè ciascuno di essi, considerato come appartenente ad una figura, coincide con uno dei corrispondenti dell'altra figura.

5. Abbiamo detto che ad un fascio di raggi di centro P della prima figura corrisponde una serie semplicemente infinita di coniche.

Qual'è il luogo dei punti ove una retta del fascio sega la conica corrispondente?

Per un punto qualunque A di una data retta a passa un raggio del fascio (P) al quale corrisponde una conica, che sega a in due punti, che diremo A', A'_1. Viceversa: per un punto A' di a passano due coniche della serie sudetta alle quali corrispondono due rette del fascio, che segano in due punti A la retta a. In tal modo vi è fra i punti A ed A' della retta a una corrispondenza $(2, 2)$ e quindi vi sono quattro punti A ciascuno dei quali coincide con uno dei suoi corrispondenti; e perciò *il luogo dei punti comuni alle rette del fascio (P) della prima figura ed alle coniche corrispondenti della seconda è una curva ψ_P del quarto ordine con un punto doppio in P e che passa per i sei punti uniti.*

Questa curva si può anche definire come *il luogo di un punto della seconda figura, tale che unito con uno dei suoi due punti corrispondenti della prima figura, dà una retta che passa per P.*

Analogamente per ogni punto P esiste un'altra curva del quarto ordine, che diremo φ_P, la quale ha un punto doppio in P, passa per

i sei punti uniti ed è il luogo di un punto della prima figura, che unito con uno dei due punti che gli corrispondono nella seconda, dà una retta passante per P.

Risulta chiaro da quanto si è detto che sopra ogni retta vi sono quattro punti, che considerati come appartenenti alla prima figura, si trovano con uno dei loro corrispondenti allineati con P, e ve ne sono altri quattro che godono di ugual proprietà se si considerano come appartenenti alla seconda figura.

Le curve φ_P, ψ_P appartenenti ad uno stesso punto P si segano; oltre che in P e nei sei punti uniti, in altri sei punti ciascuno dei quali gode della proprietà, che sulla retta che lo unisce a P si trovano uno dei punti della prima figura ed uno della seconda, i quali corrispondono al detto punto considerato rispettivamente come punto della seconda o della prima figura.

Ad un punto qualunque A_0 corrispondono due punti A della prima figura e due punti A' della seconda, secondo che A_0 si consideri come appartenente alla seconda od alla prima figura. Ora in generale nessuno dei due raggi $A_0 A$ coincide con uno dei raggi $A_0 A'$; però vi è un numero semplicemente infinito di raggi che godono di questa proprietà e questi raggi sono quelli dei sei fasci, che hanno i centri nei sei punti uniti ed altri che inviluppano una curva della sesta classe.

6. Nel fare coincidere i due piani π, π' si può fare in modo che i due fasci projettivi (O), (O') abbiano un raggio unito, il raggio $O\,O'$. In tal caso la conica λ, luogo dei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti, si spezza in una retta che diremo l e nella retta $O\,O'$. Alla retta l, considerata come appartenente ad una figura, corrisponde nell'altra una conica che la sega in due punti, *che sono due punti uniti*. Inoltre sulla retta $O\,O'$ vi sono *altri quattro punti uniti*; poichè su questa retta le coppie di punti congiunti della prima figura e le corrispondenti coppie della seconda formano due involuzioni quadratiche, e vi sono quattro punti ciascuno dei quali coincide con uno dei corrispondenti.

7. La trasformazione si dirà involutoria se ad una coppia di punti corrisponde la stessa coppia, sia che si consideri come appartenente alla prima o alla seconda figura.

È necessario allora che i punti O, O' coincidano, ed anche devono coincidere le rette doppie e le coniche limiti corrispondenti.

Ad una retta per O corrisponde un'altra retta per O, e le coppie di raggi corrispondenti sono in involuzione.

Su ciascuno dei due raggi doppi di questa involuzione le coppie di punti congiunti della prima figura e le coppie corrispondenti della seconda formano due involuzioni proiettive aventi gli stessi punti doppi ma tali che al solo punto doppio O corrisponda lo stesso punto; perciò vi sono altri due punti uniti i quali formano una coppia di punti congiunti. Di modo che i punti uniti sono distribuiti sopra i due raggi doppi dell'involuzione; e sono il punto O contato per due ed altri quattro, due su ciascun raggio.

Se però i raggi doppi sono le tangenti condotte da O alla conica limite, le involuzioni projettive, che formano su ciascun raggio le coppie di punti congiunti della prima figura e le coppie corrispondenti della seconda, hanno i punti doppi di comune e corrispondenti, e quindi non vi sono altri punti uniti.

Si ha in tal caso *che i punti uniti della trasformazione sono il punto O ed i due punti ove la conica limite sega la retta doppia ciascuno contato due volte.*

Può accadere infine che i raggi corrispondenti dei due fasci sovrapposti e projettivi coincidano, ciascuno col suo corrispondente. In tal caso, oltre al punto doppio ed unito O, su ciascun raggio vi sono due punti congiunti ed uniti, il luogo dei quali *è una conica unita, che non passa per O e che tocca la conica limite nei punti ove questa è segata dalla retta doppia.*

Reggio Calabria, marzo 1889.

P. VISALLI.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE À M. GUCCIA;

Par M. **H.-G. Zeuthen**, à Copenhague.

Adunanza del 28 aprile 1889.

. . . .

Croyant que le rapprochement des différentes méthodes qui conduisent aux mêmes résultats est toujours utile pour éclaircir ceux-ci des différents côtés, je me permets de vous communiquer ici une nouvelle démonstration du Lemme général qui sert de base des théorèmes énoncés dans votre communication du 6 janvier 1889 aux « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ».

Je commence par faire remarquer que je prends pour point de départ de l'étude sur les genres des courbes la détermination de Riemann, ou la suivante qui n'en est que la traduction dans le langage algebro-géométrique (*):

$$(1) \qquad 2(p-1) = n' + \sum(\sigma - 1) - 2n,$$

(*) Je me permets de renvoyer à mes articles dans les tomes III et IX des *Mathematische Annalen* et dans le tome I des *Acta Mathematica*, où cette détermination du genre sert de base de mon extension du théorème sur la conservation du genre.

où n est l'ordre de la courbe, n' sa classe, σ le degré de multiplicité d'une branche multiple quelconque, et où la somme $\sum$ est étendue à toutes les branches multiples de la courbe. Si la courbe n'a que des singularités Plückériennes, toutes les branches multiples formeront des points cuspidaux ($\sigma = 2$), et $\sum(\sigma - 1)$ sera égal au nombre de ces points. Dans ce même cas on trouve, en exprimant la classe n' au moyen de la première formule Plückérienne, l'expression ordinaire du genre

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - D, \tag{2}$$

où D est la somme des nombres des points doubles et des points cuspidaux.

L'expression (1) a sur l'expression (2) l'avantage qu'elle définit exactement l'influence des singularités composées.

Considérons, par exemple, la courbe

$$f_1 \cdot f_2 \cdots f_s = 0$$

composée de s courbes des ordres $n_1, n_2, \ldots, n_s$ et des genres $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Le *genre p de la courbe composée* obtient par la formule (1) une signification immédiate et différente de celle que vous lui avez attribuée par une *nouvelle définition* (*) dans le n° 5 de votre communication. Comme les nombres n, n' et $\sum(\sigma - 1)$ qui appartiennent à la courbe composée se forment par une simple addition, on voit que

$$2(p-1) = 2(p_1 - 1) + 2(p_2 - 1) + \ldots + 2(p_s - 1),$$

ou bien que

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_s - s + 1. \tag{3}$$

(*) *Note ajoutée à la lecture de l'épreuve*: Avant l'arrivée de la présente lettre, M. Guccia avait abandonné cette nouvelle définition en faveur de la même signification du genre d'une courbe composée que je défends ici. (*Voir* sa communication à l'Académie des *Lincei* du 7 avril 1889, vol. V, 1er semestre, p. 496).

Le genre p de la courbe étant trouvé, la formule (2) donnera une détermination, *a posteriori*, de l'abaissement D du genre d'une courbe d'ordre donné qui résulte de ses points singuliers.

Je me contenterai ici de considérer une courbe $f_1 . f_2 = 0$ composée de deux courbes ($s = 2$).

En désignant par D_1 et D_2 les abaissements dûs aux singularités respectives de $f_1 = 0$ et de $f_2 = 0$, on trouve par la substitution des expressions (2) des genres dans la formule (3)

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - D = \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} - D_1 + \frac{(n_2-1)(n_2-2)}{2} - D_2 - 1,$$

ce qui donne

$$D = D_1 + D_2 + n_1 n_2. \tag{4}$$

L'abaissement dû aux intersections de $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ est donc *indépendant de la position respective des deux courbes,* et égal au nombre *algébrique,* fourni par le théorème de Bézout, des points d'intersection.

Après ces préliminaires je me tourne à votre Lemme. « Soient « $[f_1] = 0$, $[f_2] = 0$, ..., $[f_s] = 0$ les équations de s courbes algé- « briques quelconques, des genres respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_s$, et telles « que le premier membre de l'équation $[f_i] = 0$ contienne, linéairement, « des paramètres arbitraires $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \ldots$. Soit $D_{i,j}$ le nombre des « intersections des courbes $f_i = 0$, $f_j = 0$ des systèmes $[f_i] = 0$, $[f_j] = 0$ « qui varient avec les paramètres $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \ldots; \lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}, \ldots$. Soit « encore p le genre de la courbe irréductible

$$F_\mu \equiv f'_1 \cdot f'_2 \ldots f'_s + \mu f''_1 \cdot f''_2 \ldots f''_s = 0,$$

« où μ est une constante arbitraire et f'_i, f''_i sont des polynômes f_i « déterminés par deux systèmes quelconques de paramètres $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \ldots$. « Alors la relation suivante aura lieu entre $D_{i,j}$, p_i, p et s :

$$\sum_{i,j} D_{i,j} + \sum_i p_i = p + s - 1,$$

« où les sommes $\sum$ sont étendues à $i = 1, 2, \ldots, s$; $j = 1$,
« $2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, s$. »

C'est bien entendu, 1° qu'aucun des polynômes $[f_1]$, $[f_2]$, ..., $[f_s]$ ne contienne en facteur une fonction rationnelle en x et y et indépendante des paramètres variables (*), et 2° que p et p_i soient les valeurs générales des genres et non pas les valeurs réduites qu'on peut avoir pour des valeurs particulières des paramètres λ et μ.

Nous avons déjà trouvé le genre de la courbe $F_0 = 0$, correspondante à $\mu = 0$, ou bien de la courbe composée $f'_1 . f'_2 \ldots f'_s = 0$: il est égal à

$$\sum_i p_i - s + 1.$$

Pour avoir l'expression générale du genre p de $F_\mu = 0$, il faut y ajouter la différence de l'abaissement dû aux points singuliers de la courbe composée $f'_1 . f'_2 \ldots f'_s = 0$ de celui qui résulte des points singuliers d'une courbe générale F_μ. En établissant que ce nombre est égal à $\sum_{i,j} D_{i,j}$, j'aurai démontré votre Lemme.

Il est clair, premièrement, que les $\sum_{i,j} D_{i,j}$ points d'intersection variables des courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., $f_s = 0$ ne correspondent pas à des points doubles de toutes les courbes $F_\mu = 0$; car les courbes d'un faisceau n'ont des points doubles variables que dans le cas, exclu ici, où une courbe fixe fait partie de toutes les courbes du faisceau. Il s'agit donc seulement de prouver que l'abaissement du genre de $F_0 = 0$ dû à un point fixe P d'une ou de plusieurs courbes $f' = 0$ est égal à celui du genre de la courbe générale $F_\mu = 0$ résultant de sa singularité au même point. Cela est évident dans le cas où seulement des branches simples des courbes $f = 0$ passent par le point; car un point r-tuple de

(*) Cette condition ne manque nullement dans votre énoncé ; car sans elle la courbe F_μ ne serait pas irréductible. Vous exprimez la condition suivante, en appelant arbitraires les paramètres λ et μ.

$f'_1 \cdot f'_2 \ldots f'_s = 0$ et de $f''_1 \cdot f''_2 \ldots f''_s = 0$ sera un point r-tuple de chaque courbe du faisceau

$$(5) \qquad f'_1 \cdot f'_2 \ldots f'_s + \mu f''_1 \cdot f''_2 \ldots f''_s = 0.$$

Pour voir que la même chose a lieu pour un point fixe P où une ou plusieurs des courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., $f_s = 0$ ont des sigularités quelconques, il suffit de démontrer qu'aucun point de contact d'une tangente menée d'un point arbitrairement choisi, A, à la courbe $F_\mu = 0$ ne coïncide avec ce point fixe pour $\mu = 0$; car sans cette coïncidence ni l'influence du point singulier sur la classe de la courbe $F_\mu = 0$, ni le nombre des branches passant par le point, ni leur degré de multiplicité ne subira aucune altération pour $\mu = 0$. Alors on verra de la formule (1) que ni non plus l'influence du point singulier sur le genre de $F_\mu = 0$ ne subira aucune modification pour $\mu = 0$.

Si nous désignons par $(f'_i) = 0$, $(f''_i) = 0$ les polaires de A par rapport aux courbes $f'_i = 0$, $f''_i = 0$, la polaire de A par rapport à $F_\mu = 0$ aura l'équation

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} (f'_1) \cdot f'_2 \ldots f'_s + f'_1 \cdot (f'_2) \ldots f'_s + \ldots + f'_1 \cdot f'_2 \ldots (f'_s) \\ + \mu \left[(f''_1) \cdot f''_2 \ldots f''_s + f''_1 \cdot (f''_2) \ldots f''_s + \ldots + f''_1 \cdot f''_2 \ldots (f''_s) \right] = 0. \end{array} \right.$$

En éliminant μ entre cette équation et l'équation $F_\mu = 0$ on trouve

$$(7) \qquad \frac{(f'_1)}{f'_1} + \frac{(f'_2)}{f'_2} + \ldots + \frac{(f'_s)}{f'_s} = \frac{(f''_1)}{f''_1} + \frac{(f''_2)}{f''_2} + \ldots + \frac{(f''_s)}{f''_s},$$

qui représente le lieu de tous les points de contact des tangentes menées de A aux courbes du faisceau $F_\mu = 0$. Ce lieu a un nombre limité de branches passant par le point singulier P. Il faut démontrer qu'on peut, en tout cas, choisir les courbes f'_i de manière qu' aucun des points qui se trouvent sur ces branches à une distance infiniment petite de P ne soit le point de contact d'une tangente menée de A à celle des courbes du faisceau $F_\mu = 0$ qui correspond à une valeur infiniment petite de μ.

En effet, si μ devient infiniment petit l'équation (5) demande qu'au moins un des rapports $\frac{f'_i}{f''_i}$ devienne en même temps infiniment petit. Or, à cause de la composition linéaire des polynômes $[f_i]$, on peut remplacer la courbe $f'_i = 0$, s'il en est besoin, par une courbe quelconque du faisceau, $f'_i + \nu_i f''_i = 0$. En évitant, pour tous les suffixes i les valeurs de ν correspondant aux courbes du faisceau qui ont avec la courbe représentée par l'équation (7) plusieurs points d'intersection coïncidant avec P que les autres courbes du faisceau, on évitera que μ ne devienne infiniment petit en même temps qu'un point d'intersection, variable avec μ, de la courbe $F_\mu = 0$ et de la courbe polaire (6), coïncide avec P. On évitera ainsi pour $\mu = 0$ les altérations de la singularité de $F_\mu = 0$ au point P qui pourraient avoir de l'influence sur le genre de $F_\mu = 0$.

Votre Lemme est donc démontré, aussi de cette manière. Peut-être les dernières considérations vous paraitront-elles moins simples que votre renvoi au théorème de M. Nöther; mais, si je ne me trompe pas, on n'en a pas besoin pour les *applications de votre Lemme*, ou, du moins, pour une partie de ces applications.

Si je vous ai bien compris, vous vous servez dans le n° 5 de votre communication déja citée, du nombre que vous appeliez alors le genre de la courbe composée, pour déterminer le nombre $\sum_{i,j} d_{i,j}$ des points d'intersection *simples*. Pour définir ce genre vous faites usage des abaissements $E_{(s)}$ du genre dûs aux singularités de la courbe composée qui ont lieu aux points d'intersection *multiples*. Or votre Lemme exprime que ces abaissements sont égaux à ceux du genre d'une courbe plus générale $F_\mu = 0$; il sera donc fort utile, si vous êtes en possession d'un procédé servant à déterminer le genre de cette courbe générale, et qui est moins applicable au cas particulier où $\mu = 0$. Si, au contraire, vous déterminez immédiatement les abaissements, correspondants à la courbe composée, la formule (4) de la présente lettre suffira pour parvenir aux mêmes applications de votre Lemme. En effet, en soustrayant des abaissements les parties qui appartiennent aux courbes composantes, on aura les nombres des points d'intersection confondus, et en soustrayant ces

nombres totaux des points d'intersection, on aura les nombres des points d'intersection simples.

J'avoue, du reste, qu' en général il me semblerait plus naturel de déterminer, *réciproquement,* les abaissements au moyen des nombres de points d'intersection confondus.

Je ne vois donc pas clairement comment, *en général,* les abaissements et ce qui a égard au genre peut servir au dénombrement en question des points d'intersection confondus des courbes ; mais dans un cas particulier, celui où il faut déterminer la classe et le nombre des singularités Plückériennes d'une courbe, donnée comme lieu géométrique, je me sers depuis longtemps d'une application du genre différente de celle que vous indiquez dans vos n^{os} 6 et 7. Je me permets d'exposer ici brièvement mon procédé dont vous trouverez un exemple dans ma *Note sur un problème de Steiner* (*).

La définition du lieu conduit, ordinairement sans beaucoup de difficulté, à l'ordre du lieu et à la détermination de ses branches multiples. Une détermination directe de sa classe et des points d'intersection de branches différentes entre elles, serait, en général, plus difficile; mais on peut y substituer la détermination directe du genre de la courbe. En effet, la définition du lieu conduit, ordinairement, à une correspondance du lieu cherché avec une courbe plus simple dont on peut supposer connu le genre. Si leurs points se correspondent un-à-un, les deux courbes seront du même genre, et si la correspondance de leurs points est multiforme, on pourra faire usage de l'extension du théorème sur la conservation du genre. Le genre étant trouvé, la formule (1) servira à déterminer la classe, et la formule (2) à déterminer l'abaissement total D dû à tous les points multiples. En en soustrayant les abbaissements dûs aux singularités formées par les branches multiples, on aura le nombre des points doubles formés par l'intersection de branches simples. Les formules Plückériennes, où celles qu'on déduit de (1) et (2) par le principe de dualité, serviront à déterminer les nombres des tangentes d'inflexion et des tangentes doubles. Au premier nombre sera

(*) *Bulletin de Darboux*, 2^{e} série, t. XI.

compris, selon un théorème de M. Halphen, $(r-s-1)$ fois la tangente à une branche s-tuple, si elle a avec la branche r points d'intersection confondus.

Copenhague, le 10 avril 1889.

H.-G. ZEUTHEN.

U CERTI GRUPPI ASSOCIATI DI PUNTI;

Nota di **Guido Castelnuovo**, in Torino.

Adunanza del 12 maggio 1889.

rgomento di Geometria proiettiva elementare qui trattato fu lte oggetto di studio nel piano e nello spazio a tre dimensio- Gli eleganti risultati che si ottennero, ci fecero sorgere il de- li esporlo con un metodo semplice ed uniforme, il quale per- di aggiungerne altri e di estenderli agli spazi superiori. Così ci ıtò una applicazione dei gruppi associati ad una teoria interes- campi più elevati, quale è quella dei gruppi di punti base dei ineari di quadriche; il più semplice di tali gruppi (**) si trova nell'ultimo paragrafo del presente lavoro. Altre applicazioni alle curve e rigate ellittiche) avremmo forse potuto esporre, se fin da principio non ci fossimo imposti la massima brevità in un soggetto così elementare.

(*) Per il piano vedi Sturm: *Das Problem der Projectivität* (Math. Ann., I), *Ueber Collineation und Correlation* (Math. Ann. XXII); per il piano e lo spazio a tre dimensioni, le due memorie ricche di risultati del Rosanes: *Ueber linear-abhängige Punktsysteme; Zur Theorie der reciproken Verwandschaften* (Journal für Math. Bd. 88, 90).

(**) Il gruppo di $2n$ punti di S_{n-1} studiato al n° 14 è detto il *più semplice* tra i gruppi di punti base di un sistema lineare di quadriche, perchè in un gruppo composto di meno che $2n$ punti *appartenenti* a S_{n-1} il passaggio di una quadrica per alcuni non porta mai di conseguenza il passaggio per i rimanenti; questi ultimi gruppi non presentano quindi nessun interesse.

Quanto al nome di gruppi associati, lo abbiamo introdotto in luogo del *linearabhängige Punktsysteme* usato dal Rosanes per abbreviare gli enunciati.

1. Nello spazio a $n-1$ dimensioni S_{n-1} ($n \geqq 2$) si trovino due n-goni (*); siano $a_1, a_2 \ldots a_n$ i vertici del primo, $a_{n+1}, a_{n+2} \ldots a_{2n}$ i vertici del secondo, e siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2} \ldots \alpha_{2n}$ le faccie dei due n-goni, essendo α_i opposta ad a_i. Diremo che i due gruppi, l'uno costituito dai $2n$ vertici a, l'altro dalle $2n$ faccie α sono *associati*, e che in essi sono omologhi il vertice a_i e la faccia α_i ($i = 1, 2, \ldots 2n$). Ci occuperemo di quelle proprietà dei due gruppi, nelle quali i $2n$ punti e i $2n$ spazi (faccie) si comportano simmetricamente; e che sono applicabili a due gruppi di $2n$ elementi, l'uno corrispondente al gruppo $a_1 \ldots a_{2n}$ in una certa proiettività, l'altro corrispondente al gruppo $\alpha_1 \ldots \alpha_{2n}$ in un'altra proiettività. Da ciò la convenienza di estendere la precedente definizione.

Due gruppi, ciascuno costituito da $2n$ elementi di una forma fondamentale di specie $n-1$, si dicono associati se in un S_{n-1} esistono due n-goni tali, che il primo gruppo sia proiettivo al gruppo dei $2n$ vertici, e il secondo gruppo sia proiettivo al gruppo delle $2n$ faccie dei due n-goni; nei due gruppi si diranno *omologhi* due elementi che corrispondano ad un vertice e ad una faccia opposta in uno dei due n-goni.

2. Così i $2n$ vertici di due n-goni in S_{n-1}, e i $2n$ vertici di due n-goni appartenenti ad uno spazio S'_{n-1} e corrispondenti ai primi in una correlazione dànno due gruppi associati di $2n$ punti; e le $2n$ faccie dei due primi n-goni e le $2n$ faccie degli ultimi due dànno due gruppi associati di $2n$ spazi.

E in particolare se $a_1 \ldots a_n$, $a'_1 \ldots a'_n$ sono due n-goni reciproci l'uno dell' altro in una polarità di S_{n-1}, i due gruppi di $2n$ punti

$$a_1, a_2 \ldots a_n, a'_1, a'_2 \ldots a'_n,$$

$$a'_1, a'_2 \ldots a'_n, a_1, a_2 \ldots a_n$$

(*) Chiamiamo *n-gono* di S_{n-1} la figura costituita da n punti indipendenti di S_{n-1}, e talvolta anche la figura duale costituita dagli n spazi a $n-2$ dimensioni (in breve dalle n *faccie*), che congiungono questi vertici ad $n-1$, ad $n-1$.

sono associati; e sono omologhi a_i, a'_i, se la faccia opposta ad a'_i è lo spazio polare di a_i.

Due gruppi associati di quattro elementi di due forme di prima specie sono proiettivi, e reciprocamente; poichè se le due forme sono ad es. punteggiate ed a_1, a_2, a_3, a_4; a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, sono i due gruppi associati, dovranno esistere per la definizione due coppie di punti $b_1 b_2$, $b_3 b_4$ di una punteggiata, tali che si abbia

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) \,\overline{\wedge}\, (b_1 b_2 b_3 b_4)$$

$$(a'_1 a'_2 a'_3 a'_4) \,\overline{\wedge}\, (b_2 b_1 b_4 b_3),$$

dal che segue

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) \,\overline{\wedge}\, (a'_1 a'_2 a'_3 a'_4):$$

nello stesso modo si dimostra il reciproco.

3. Riprendiamo i due n-goni generali di S_{n-1} di vertici $a_1 \ldots a_n$, $a_{n+1} \ldots a_{2n}$, di faccie $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\alpha_{n+1} \ldots \alpha_{2n}$; consideriamo in essi un vertice qualunque a_i ed una faccia α_k che non sia opposta ad a_i $(k \neq i)$. Dico che i vertici dei due n-goni tranne a_i, a_k, e le faccie degli n-goni tranne α_i, α_k, rispettivamente proiettati da a_i, segate da α_k, dànno due gruppi associati di $2(n-1)$ elementi (il primo di rette per un punto, il secondo di spazi a $n-2$ dimensioni in uno spazio a $n-1$ dimensioni).

Distingueremo due casi, supponendo anzitutto che a_i, α_k non appartengano a uno stesso n-gono.

Sia ad es. a_i un vertice del primo n-gono, α_k una faccia del secondo n-gono; consideriamo in α_k i due $(n-1)$-goni, l'uno costituito dalle intersezioni di α_k cogli spigoli (rette) del primo n-gono che escono da a_i, l'altro dagli $n-1$ vertici del secondo n-gono che stanno in α_k. I $2(n-1)$ vertici, e le $2(n-1)$ faccie di questi $(n-1)$-goni, costituiscono due gruppi associati per definizione; quindi anche il gruppo dei $2(n-1)$ raggi proiettanti da a_i quei $2(n-1)$ vertici è associato al gruppo delle $2(n-1)$ faccie. Ma i $2(n-1)$ raggi sono le congiungenti di a_i con tutti i rimanenti punti a tranne a_k; e le $2(n-1)$ faccie sono le intersezioni di α_k con tutti i rimanenti spazi α tranne α_i; per conseguenza in questo caso il teorema è dimostrato.

Siano ora a_i, α_k vertice e faccia (non opposta) in uno stesso n-gono, e per fissar le idee supponiamo $i = 1$, $k = 2$. Preso un vertice ad arbitrio nell'altro n-gono, ad es. a_{n+1}, e la faccia opposta α_{n+1}, si considerino in α_{n+1} i due $(n - 1)$-goni, l'uno costituito dalle intersezioni di α_{n+1} colle rette che da a_1 proiettano i punti a_3, $a_4 \ldots a_n$ ed a_{n+1}, l'altro dai punti a_{n+2}, $a_{n+3} \ldots a_{2n}$. Il gruppo delle $2(n - 1)$ rette che proiettano i vertici di questi $(n-1)$-goni da a_1, è associato al gruppo dei $2(n-1)$ spazi (a $n-2$ dimensioni) proiezioni delle faccie degli $(n-1)$-goni su α_2 da a_{n+1}. Ora le $2(n-1)$ rette sono le congiungenti di a_1 coi punti a_3, $a_4 \ldots a_n$, a_{n+1}, $a_{n+2} \ldots a_{2n}$; e i $2(n - 1)$ spazi sono le intersezioni di α_2 colle faccie α_3, $\alpha_4 \ldots \alpha_n$, α_{n+1}, $\alpha_{n+2} \ldots \alpha_{2n}$ (*); così il teorema è dimostrato anche in questo caso.

Se ora si bada alla definizione di due gruppi associati nella posizione più generale (1), si riconosce che il precedente teorema dà origine all'altro:

Se $a_1 \ldots a_{2n}$, $a'_1 \ldots a'_{2n}$ sono due gruppi associati di $2n$ punti in due spazi S_{n-1}, e fissati nel primo gruppo due punti arbitrari a_i, a_k e gli omologhi punti a'_i, a'_k nel secondo gruppo, si proiettano i rimanenti $2(n - 1)$ punti a da a_i e i rimanenti $2(n - 1)$ punti a' da a'_k su due spazi S_{n-2}, si ottengono in questi due gruppi associati di $2(n - 1)$ punti.

4. Applicando più volte questo teorema, si giunge al seguente:

Se $a_1 \ldots a_{2n}$, $a'_1 \ldots a'_{2n}$ sono due gruppi associati di $2n$ punti in due S_{n-1}, e si fissano $2k$ punti $a_{i_1} \ldots a_{i_k}$, $a_{l_1} \ldots a_{l_k}$ nel primo gruppo e gli omologhi $a'_{i_1} \ldots a'_{i_k}$, $a'_{l_1} \ldots a'_{l_k}$ nel secondo, i rimanenti $2(n - k)$ punti a e gli omologhi punti a' sono proiettati rispet-

(*) Infatti se con a'_3, $a'_4 \ldots a'_n$, a'_{n+1} indichiamo i vertici del primo $(n - 1)$-gono di α_{n+1}, la faccia opposta ad a'_3 congiunta con a_{n+1} dà uno spazio il quale passa per a_1, e quindi contiene i punti $a_4 \ldots a_n$; perciò la proiezione di questa faccia da a_{n+1} su α_2 contiene i punti a_1, $a_4 \ldots a_n$ e coincide colla intersezione di α_2, α_3; analogo ragionamento per le faccie opposte ad $a'_4 \ldots a'_n$. La faccia opposta ad a'_{n+1} è essa stessa l'intersezione di α_2 con α_{n+1}. Le faccie del secondo $(n - 1)$-gono di α_{n+1}, congiunte con a_{n+1}, dànno poi evidentemente gli spazi $\alpha_{n+2} \ldots \alpha_{2n}$.

tivamente dagli spazi $(a_{i_1} \ldots a_{i_k})$, $(a'_{i_1} \ldots a'_{i_k})$ sopra due spazi S_{n-k} in due gruppi associati di $2(n-k)$ punti (*).

In particolare per $k = n - 2$ (2):

Se in S_{n-1}, S'_{n-1} si trovano due gruppi associati di $2n$ punti, $a_1 \ldots a_{2n}$, $a'_1 \ldots a'_{2n}$, quattro punti a e gli omologhi a' sono proiettati rispettivamente dall'S_{n-3} congiungente $n-2$ fra i rimanenti $2(n-2)$ punti a, e dall' S'_{n-3} congiungente quelli $n-2$ tra i rimanenti punti a' che non corrispondono ai punti a di S_{n-3}, mediante due quaderne proiettive di spazi a $n-2$ dimensioni.

5. Da questo teorema si deducono importanti conseguenze.

Siano ancora $a_1 \ldots a_{2n}$, $a'_1 \ldots a'_{2n}$ i due gruppi associati di $2n$ punti giacenti nei due spazi S_{n-1}, S'_{n-1}. I punti $a'_1, a'_2 \ldots a'_{n+2}$ determinano in generale una curva razionale C' d'ordine $n-1$, che passa per essi. Ora se indichiamo con S_{n-3} lo spazio dei punti $a_{n+3} \ldots a_{2n}$ e con $S'^{(i)}_{n-3}$ lo spazio dei punti $a'_1 \ldots a'_{i-1}, a'_{i+1} \ldots a'_{n-1}$ $(i \leqq n-1)$, si ha

$$S_{n-3}\,(a_n a_{n+1} a_{n+2} a_i) \;\overline{\wedge}\; S'^{(i)}_{n-3}\,(a'_n a'_{n+1} a'_{n+2} a'_i) \;\overline{\wedge}\; (a'_n a'_{n+1} a'_{n+2} a'_i),$$

indicando con quest'ultimo simbolo il rapporto anarmonico dei quattro punti a'_n, a'_{n+1}, a'_{n+2}, a'_i su C'. Attribuendo ad i i valori $1, 2 \ldots n-1$, si giunge al teorema:

In due gruppi associati di $2n$ punti giacenti in due S_{n-1}, gli spazi che proiettano $n+2$ punti di un gruppo dallo spazio S_{n-3} dei rimanenti punti del gruppo, formano un fascio proiettivo alla punteggiata degli omologhi $n+2$ punti dell'altro gruppo sulla curva razionale normale che li contiene.

6. *Due gruppi associati ad uno stesso sono proiettivi tra loro.*

(*) Se i due gruppi associati primitivi sono costituiti dai punti e dalle faccie di due n-goni in S_{n-1}, ed n essendo *pari*, è $k = \frac{n}{2}$, si ha: I vertici e le faccie di un n-gono di S_{n-1} sono risp. proiettati e segati da uno spazio $S_{\frac{n}{2}-1}$ mediante due gruppi associati di n elementi.

Siano $b_1 \ldots b'_{2n}$, $c_1 \ldots c_{2n}$ i due gruppi di $2n$ punti di S'_{n-1}, S''_{n-1} associati allo stesso gruppo $a_1 \ldots a_{2n}$. Si stabilisca fra S'_{n-1}, S''_{n-1} l'omografia che muta i punti $c_1 \ldots c_{n+1}$ negli omologhi $b_1 \ldots b_{n+1}$; ai punti $c_{n+2} \ldots c_{2n}$ corrispondano in S'_{n-1} i punti $b'_{n+2} \ldots b'_{2n}$.

Allora se i è uno dei numeri $n+2$, $n+3$, $\ldots$ $2n$ le due punteggiate $(b_1 b_2 \ldots b_{n+1} b_i)$, $(b_1 b_2 \ldots b_{n+1} b'_i)$ sulle due curve razionali normali determinate da questi punti sono proiettive per il teorema precedente. Ma le due curve razionali coincidono; perchè hanno $n+1$ punti comuni b_1, $b_2 \ldots b_{n+1}$, ed inoltre i gruppi di questi $n+1$ punti sulle due curve sono proiettivi (*). Dunque b_i coincide con b'_i, ed i due gruppi $b_1 \ldots b_{2n}$, $c_1 \ldots c_{2n}$ si corrispondono in una omografia.

7. Da questa osservazione segue un notevole teorema. Siano

$$a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n},\ a'_1 \ldots a'_n a'_{n+1} \ldots a'_{2n}$$

due gruppi associati di $2n$ punti di S_{n-1}, S'_{n-1}; formiamo coi $2n$ punti a due n-goni che non abbiano vertici comuni, ad es. i due $a_1 \ldots a_n$, $a_{n+1} \ldots a_{2n}$ e siano $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\alpha_{n+1} \ldots \alpha_{2n}$ le faccie di questi n-goni. Coi punti omologhi a' formiamo pure due n-goni e stabiliamo la correlazione che muta $\alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_{n+1}$ in $a'_1 \ldots a'_n a'_{n+1}$; per questa correlazione $\alpha_{n+2} \ldots \alpha_{2n}$ si portino in $a''_{n+2} \ldots a''_{2n}$. Allora il gruppo $a'_1 \ldots a'_n a'_{n+1} a''_{n+2} \ldots a''_{2n}$ è (2) associato al gruppo $a_1 \ldots a_{2n}$, e quindi proiettivo al gruppo $a'_1 \ldots a'_n a'_{n+1} a'_{n+2} \ldots a'_{2n}$; devono dunque $a''_{n+2} \ldots a''_{2n}$ coincidere coi punti $a'_{n+2} \ldots a'_{2n}$; ossia:

Se i $2n$ punti di un gruppo si distribuiscono in due n-goni, e coi punti omologhi del gruppo associato si formano due n-goni, i primi n-goni corrispondono agli ultimi in una correlazione.

8. Di qui si vede come dati in S_{n-1} i $2n$ punti $a_1 \ldots a_{2n}$ e in S'_{n-1} $n+1$ punti $a'_1 \ldots a'_{n+1}$, si possano in quest'ultimo spazio co-

(*) Infatti un punto qualunque della prima curva e l'omologo della seconda (in questa proiettività) sono proiettati da ciascuna faccia dell'$(n-1)$-gono $b_1 \ldots b_{n-1}$ mediante due spazi coincidenti; dal che segue che quei due punti coincidono.

struire $n-1$ punti $a'_{n+2} \ldots a'_{2n}$ i quali con $a'_1 \ldots a'_{n+1}$ diano un gruppo associato ad $a_1 \ldots a_{2n}$; e ciò in un sol modo, se si vuole che a'_i sia omologo ad a_i. Perchè distribuiti i $2n$ punti a in due n-goni $a_1 \ldots a_n$, $a_{n+1} \ldots a_{2n}$ (di faccie rispett. $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\alpha_{n+1} \ldots \alpha_{2n}$), basta stabilire la correlazione che muta $\alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_{n+1}$ in $a'_1 \ldots a'_n a'_{n+1}$; questa muterà $\alpha_{n+2} \ldots \alpha_{2n}$ nei punti richiesti $a'_{n+2} \ldots a'_{2n}$.

La stessa costruzione può farsi in un altro modo. Essendo i uno dei numeri $n+2$, $n+3 \ldots 2n$, si indichi con S_{n-3} lo spazio determinato dai punti $a_{n+2} \ldots a_{i-1}$, $a_{i+1} \ldots a_{2n}$, e con $S'^{(h)}_{n-3}$ la faccia a $n-3$ dimensioni dell' $(n-1)$-gono $a'_1 \ldots a'_{n-1}$, che è opposta al vertice a'_h. Dal n° 4 si ha

$$S_{n-3}\,(a_h a_n a_{n+1} a_i) \;\overline{\wedge}\; S'^{(h)}_{n-3}\,(a'_h a'_n a'_{n+1} a'_i),$$

la quale ci determina lo spazio che da $S'^{(h)}_{n-3}$ proietta a'_i; attribuendo ad h i valori $1, 2 \ldots n-1$, si ottengono $n-1$ spazi a $n-2$ dimensioni, i quali si segano precisamente nel punto a'_i.

Da ciò segue pure: *affinchè un gruppo $a'_1 \ldots a'_{2n}$ sia associato al gruppo $a_1 \ldots a_{2n}$, è necessario e sufficiente che gli spazi proiettanti da ciascuna faccia dell' $(n-1)$-gono $a'_1 \ldots a'_{n-1}$ il vertice opposto, i punti $a'_n\, a'_{n+1}$ e uno per volta dei rimanenti punti a', costituiscano una quaderna proiettiva a quella degli spazi che proiettano i quattro punti omologhi a da quella faccia dell'$(n-1)$-gono $a_{n+2} \ldots a_{2n}$, che non contiene nessuno di questi quattro punti* (*).

9. *Se in una correlazione tra gli spazi S_{n-1}, S'_{n-1} di due gruppi associati $a_1 \ldots a_{2n}$, $a'_1 \ldots a'_{2n}$, i punti $a_1, a_2 \ldots a_{2n-1}$ sono coniugati rispett. ai punti $a'_1, a'_2 \ldots a'_{2n-1}$, anche i punti a_{2n}, a'_{2n} sono coniugati* (**).

Indichiamo con Ω la correlazione dell'enunciato. Coi punti a for-

---

(*) In particolare $2n$ punti arbitrari di una curva razionale normale di S_{n-1} costituiscono un gruppo associato a se stesso (ciascun punto essendo omologo a se stesso): i $2n$ punti distribuiti in due n-goni dànno due n-goni autoreciproci in una polarità di S_{n-1} (7); questa osservazione ci sarà utile.

(**) Per $n=3$ si ha un noto teorema dovuto a Clebsch. (Math. Ann., VI).

miamo i due n-goni $a_1 \ldots a_n$, $a_{n+1} \ldots a_{2n}$ e coi punti a' gli n-goni $a'_1 \ldots a'_n$, $a'_{n+1} \ldots a'_{2n}$; poi applichiamo allo spazio S'_{n-1} la correlazione Ω' che muta i vertici dei due ultimi n-goni nelle faccie dei due n-goni di S_{n-1} (7).

La correlazione Ω seguita dalla Ω' dà per prodotto una omografia tra i punti di S_{n-1}; questa omografia porta i vertici dell'n-gono $a_1 \ldots a_n$ in punti delle faccie opposte, e i primi $n - 1$ vertici dell'n-gono $a_{n+1} \ldots a_{2n}$ in punti delle faccie opposte; quindi porterà anche l'ultimo vertice a_{2n} in un punto della faccia opposta α_{2n} (*). E poichè α_{2n} è l'omologo di a'_{2n} in Ω' si conchiude che lo spazio corrispondente ad a_{2n} in Ω passa per a'_{2n}.

10. Nei due spazi S_{n-1}, S'_{n-1} si trovino i due gruppi associati $a_1 \ldots a_{2n}$, $a'_1 \ldots a'_{2n}$. La collineazione che muta i punti $a'_1, a'_2 \ldots a'_{n+1}$ nei punti $a_1, a_2 \ldots a_{n+1}$, di S_{n-1}, porterà i punti $a'_{n+2} \ldots a'_{2n}$ in certi punti $b_{n+2} \ldots b_{2n}$ di S_{n-1}; e i due gruppi $a_1 \ldots a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}$,

---

(*) Ciò per il teorema: *Se in una omografia tra i punti di S_{n-1} un n-gono è circoscritto al proprio corrispondente, ogni n-gono del quale $n - 1$ faccie contengano i punti omologhi ai vertici opposti, contiene nell'ultima faccia il punto omologo all'ultimo vertice.* (Cfr. Segre: *Sur les invariants de deux formes quadratiques*, Math. Ann., XXIV). Del resto una dimostrazione semplice di questo teorema è la seguente. Assumendo come n-gono di riferimento l'n-gono unito dell'omografia, al punto $(x_1, \ldots x_n)$ corrisponda nell'omografia il punto $(a_1 x_1, \ldots a_n x_n)$. Siano $1, 2 \ldots n$ i vertici di un n-gono di S_{n-1} ed il vertice i abbia per coordinate $x_1^{(i)}, \ldots x_n^{(i)}$. Se indichiamo con Δ il determinante d'ordine n le cui orizzontali sono costituite dalle coordinate dei punti $1, 2 \ldots n$, dovrà esser nullo il determinante $\Delta^{(i)}$, che si ottiene da Δ sostituendo alla i-esima orizzontale la linea $a_1 x_1^{(i)}, \ldots a_n x_n^{(i)}$, se il punto omologo ad i sta nella faccia opposta ad i. Ora sviluppando $\Delta^{(i)}$ secondo questa orizzontale, ponendo successivamente $i = 1, 2 \ldots n$ e sommando, si trova

1) $$\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \ldots + \Delta^{(n)} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\Delta.$$

Di qui segue che se quell'n-gono è circoscritto al proprio omologo, essendo nullo il primo menbro della 1) ma non Δ, deve esser $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$. Se poi questa uguaglianza sussiste e di un n-gono $1, 2 \ldots n$ i punti omologhi ai primi $n - 1$ vertici cadono nelle faccie opposte, essendo nullo il secondo membro della 1), e nulli $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \ldots \Delta^{(n-1)}$, deve esser anche $\Delta^{(n)} = 0$, ossia il punto omologo ad n deve cadere nella faccia opposta ad n.

$a_1 \ldots a_{n+1} b_{n+2} \ldots b_{2n}$ saranno associati. Quindi vi è una correlazione in S_{n-1} per la quale ai due n-goni $a_1 \ldots a_n$, $a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}$ corrispondono i due n-goni $a_1 \ldots a_n$, $a_{n+1} b_{n+2} \ldots b_{2n}$. Questa correlazione, la quale fa corrispondere ai vertici di un n-gono $a_1 \ldots a_n$ le faccie opposte, è una polarità; il punto a_{n+1} ha per spazio polare tanto $(a_{n+2} \ldots a_{2n})$, quanto $(b_{n+2} \ldots b_{2n})$; questi due spazi devono adunque *coincidere*.

Inoltre i due $(n-1)$-goni $a_{n+2} \ldots a_{2n}$, $b_{n+2} \ldots b_{2n}$ sono reciproci l'uno dell' altro in una polarità; quindi (2) i due gruppi di $2(n-1)$ punti

$$a_{n+2} \ldots a_{2n} b_{n+2} \ldots b_{2n}$$

$$b_{n+2} \ldots b_{2n} a_{n+2} \ldots a_{2n}$$

sono associati.

Queste osservazioni trasportate ai due gruppi associati primitivi dànno i teoremi:

Se $a_1 \ldots a_{2n}$, $a'_1 \ldots a'_{2n}$ *sono due gruppi associati, l'omografia che muta* $n+1$ *tra i punti* a (ad es. i primi $n+1$) *negli omologhi punti* a', *muta lo spazio* (a $n-2$ dimensioni) *dei rimanenti punti* a *nello spazio dei rimanenti punti* a'.

Se in questa omografia sono coppie di punti omologhi

$$(a_{n+2}, b'_{n+2}) \ldots (a_{2n}, b'_{2n}), (b_{n+2}, a'_{n+2}) \ldots (b_{2n}, a'_{2n}),$$

i due gruppi

$$a_{n+2} \ldots a_{2n} b_{n+2} \ldots b_{2n}$$

$$a'_{n+2} \ldots a'_{2n} b'_{n+2} \ldots b'_{2n}$$

sono associati.

11. Si considerino ancora i due gruppi associati $a_1 \ldots a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}$, $a_1 \ldots a_{n+1} b_{n+2} \ldots b_{2n}$ giacenti in S_{n-1} e sia S_{n-2} lo spazio dei punti $a_{n+2} \ldots a_{2n}$, $b_{n+2} \ldots b_{2n}$. Una curva razionale C d'ordine $n-1$, passante per i punti $a_1 \ldots a_n$, a_{n+1} seghi lo spazio S_{n-2} negli $n-1$ punti $c_1, c_2 \ldots c_{n-1}$. I due n-goni $a_1 \ldots a_n$, $a_{n+1} c_1 \ldots c_{n-1}$, i cui vertici stanno su C, sono autoreciproci in un sistema polare (8, nota), il quale è completamente determinato dal primo n-gono e dalla coppia a_{n+1}, S_{n-2} di elementi corrispondenti; questo sistema polare coincide adunque con quello considerato nel paragrafo precedente.

Quindi l' $(n-1)$-gono $c_1 \ldots c_{n-1}$ è autoreciproco in quella polarità di S_{n-2} che è determinata dai due $(n-1)$-goni $a_{n+2} \ldots a_{2n}$, $b_{n+2} \ldots b_{2n}$, reciproci l'uno dell'altro. Da qui segue che i due gruppi di $2(n-1)$ punti

$$c_1, c_2 \ldots c_{n-1} a_{n+2} \ldots a_{2n}$$

$$c_1, c_2 \ldots c_{n-1} b_{n+2} \ldots b_{2n}$$

sono associati. Ritornando ai due gruppi associati $a_1 \ldots a_{2n}$, $a'_1 \ldots a'_{2n}$ di S_{n-1}, S'_{n-1}, abbiamo il teorema:

Nella omografia che muta i punti $a_1 \ldots a_{n+1}$ nei punti $a'_1 \ldots a'_{n+1}$, una curva razionale normale C passante per i primi $n+1$ punti si muti nella curva razionale normale C'; allora il gruppo di $2(n-1)$ punti costituito dalle intersezioni di C collo spazio $(a_{n+2} \ldots a_{2n})$ e da questi ultimi punti a, è associato al gruppo costituito dalle intersezioni di C' collo spazio $(a'_{n+2} \ldots a'_{2n})$ e da questi ultimi punti a'.

12. *Se $a_1 \ldots a_{2n}$, $a'_1 \ldots a'_{2n}$ sono due gruppi associati di S_{n-1}, S'_{n-1}, ad ogni spazio S_{n-3} di S_{n-1} corrisponde uno spazio unico e determinato S'_{n-3} di S_{n-1} tale che*

$$S_{n-3}\,(a_1, a_2 \ldots a_{2n}) \;\overline{\wedge}\; S'_{n-3}\,(a'_1, a'_2 \ldots a'_{2n}).$$

Il teorema fu già dimostrato in modo elementare per $n=3$ (*). Noi quindi possiamo limitarci a provare che se vale per due gruppi associati di $2(n-1)$ punti appartenenti a due spazi S_{n-2}, S'_{n-2}, vale pure per due gruppi di $2n$ punti $a_1 \ldots a_{2n}$, $a'_1 \ldots a'_{2n}$ di S_{n-1}, S'_{n-1}.

Fissato lo spazio S_{n-3} in S_{n-1}, si descriva la curva razionale normale C che passa per i punti $a_1 \ldots a_{n+1}$ e sega S_{n-3} in $n-2$ punti (curva che esiste ed è unica in generale), e sia C' la curva di S'_{n-1} corrispondente a C in quella omografia O che muta i punti $a_1 \ldots a_{n+1}$ nei punti $a'_1 \ldots a'_{n+1}$.

Indichiamo con S_{n-2} lo spazio dei punti $a_{n+2} \ldots a_{2n}$, con S'_{n-2} lo spazio dei punti $a'_{n+2} \ldots a'_{2n}$; la curva C seghi S_{n-2} nei punti $c_1, c_2 \ldots c_{n-1}$, e la curva C' seghi S'_{n-2} nei punti $c'_1, c'_2 \ldots c'_{n-1}$: i due spazi S_{n-2}, S'_{n-2} si corrispondono in O, quindi le due punteggiate $(c_1, c_2 \ldots c_{n-1})$, $(c'_1, c'_2 \ldots c'_{n-1})$ su C, C' sono proiettive.

(*) Sturm, *Das Problem der Projectivität*, pag. 536.

Poichè i due gruppi di $2(n-1)$ punti

$$c_1, c_2 \ldots c_{n-1}, a_{n+2} \ldots a_{2n}$$

$$c'_1, c'_2 \ldots c'_{n-1}, a'_{n+2} \ldots a'_{2n}$$

di S_{n-2}, S'_{n-2} sono associati (11), allo spazio S_{n-4} intersezione di S_{n-2}, S_{n-3} si potrà far corrispondere un determinato ed unico spazio S'_{n-4} di S'_{n-2}, in guisa che sia

$$1) \quad S_{n-4}(c_1 \ldots c_{n-1} a_{n+2} \ldots a_{2n}) \overline{\wedge} S'_{n-4}(c'_1 \ldots c'_{n-1} a'_{n+2} \ldots a'_{2n}).$$

Questa relazione ci mostra che il fascio degli spazi che proiettano $c'_1, c'_2 \ldots c'_{n-1}$ da S'_{n-4}, è proiettivo alla punteggiata $(c_1, c_2 \ldots c_{n-1})$ sopra C, quindi alla punteggiata $(c'_1, c'_2 \ldots c'_{n-1})$ sopra C'.

E poichè i punti $c'_1, c'_2 \ldots c'_{n-1}$, intersezioni di C' con S'_{n-2} sono proiettati da uno spazio S'_{n-4} di S'_{n-2} mediante un fascio proiettivo alla loro punteggiata su C', segue che per S'_{n-4} si può condurre uno spazio determinato ed unico S'_{n-3} il quale seghi C' in $n-2$ punti (*). Questo spazio S'_{n-3} passa per S'_{n-4}; quindi per la 1)

(*) Giustifichiamo questa affermazione. Fra le ∞^2 corde di C' esiste certo qualcuna che seghi S'_{n-4} in un punto; sia r una tal corda. Da r si proiettino la curva C' e lo spazio S'_{n-4} in uno spazio a $n-3$ dimensioni; si otterrà in questo una curva C'' d'ordine $n-3$ ed uno spazio S''_{n-5}. E se $c''_1, c''_2 \ldots c''_{n-1}$ indicano le proiezion dei punti $c'_1, c'_2 \ldots c'_{n-1}$, sarà

$$S''_{n-5}(c''_1, c''_2 \ldots c''_{n-1}) \overline{\wedge} (c''_1, c''_2 \ldots c''_{n-1}),$$

indicando col secondo membro di questa relazione la punteggiata dei punti c'' su C''. Se ora si costruisce la curva razionale d'ordine $n-3$ (ben determinata) che passa per i punti $c''_1, c''_2 \ldots c''_{n-1}$ e sega S''_{n-5} in $n-4$ punti, questa curva avendo con C'' $(n-1)$ punti comuni, i quali inoltre costituiscono sopra di essa e sopra C'' due punteggiate proiettive, deve coincidere con C'' (6, nota); quindi C'' sega in $n-4$ punti S''_{n-5}. Dal che segue che C' sega in $n-2$ punti lo spazio $(r\, S''_{n-4})$. Questo adunque è uno spazio S'_{n-3} che passa per S'_{n-4} e sega C' in $n-2$ punti. Un altro spazio a $n-3$ dimensioni avente le stesse proprietà di S'_{n-3} non può esistere, perchè altrimenti esso con S'_{n-3} darebbe uno spazio a $(n-2)$ dimensioni secante C' in più che $n-1$ punti.

$$S_{n-3}\,(c_1\,\ldots\,c_{n-1}a_{n+2}\,\ldots\,a_{2n})\,\overline{\wedge}\,S'_{n-3}\,(c'_1\,\ldots\,c'_{n-1}a'_{n+2}\,\ldots\,a'_{2n});$$

d'altra parte S'_{n-3} seca la curva C' omologa a C in $n-2$ punti; quindi:

$$S_{n-3}\,(c_1\,\ldots\,c_{n-1}a_1\,\ldots\,a_{n+1})\,\overline{\wedge}\,S'_{n-3}\,(c'_1\,\ldots\,c'_{n-1}a'_1\,\ldots\,a'_{n+1}).$$

Da queste segue finalmente (se $n-1 \geqq 3$)

$$S_{n-3}\,(a_1\,\ldots\,a_{n+1}a_{n+2}\,\ldots\,a_{2n})\,\overline{\wedge}\,S'_{n-3}\,(a'_1\,\ldots\,a'_{n+1}a'_{n+2}\,\ldots\,a'_{2n})$$

come si voleva dimostrare. Dal ragionamento fatto si deduce pure che in generale in S'_{n-1} non esiste un secondo spazio a $n-3$ dimensioni soddisfacente a quest'ultima condizione.

13. Dall'ultimo teorema seguono altre proprietà di due gruppi associati; noi non ci fermiamo a dimostrarle, ma ci limitiamo ad enunciarne alcune.

Se i due spazi ad $n-1$ dimensioni in cui stanno due gruppi associati di $2n$ punti appartengono ad un S_{2n-1}, le $2n$ rette congiungenti le coppie di punti omologhi hanno la proprietà, che ogni spazio il quale seghi $2n-1$ di quelle rette, sega anche la rimanente. Ed ogni spazio il quale seghi $2n-i$ di quelle rette, sega lo spazio delle rimanenti i in uno spazio a $i-1$ dimensioni.

Le $2n$ rette distribuite (in un modo qualunque) *in due n-ple, determinano in S_{2n-1} un sistema nullo, rispetto al quale ogni retta di ciascuna n-pla ha come reciproco lo spazio delle rimanenti rette della n-pla stessa.*

I due spazi a $n-1$ dimensioni dei due gruppi associati sono autoreciproci nel sistema nullo.

Se due gruppi associati di $2n$ punti giacciono in S_{n-1}, S'_{n-1} e da due spazi S_{n-i-1}, S'_{n-i-1} in questi contenuti, $2n-i$ punti del primo gruppo e rispett. gli omologhi del secondo sono proiettati mediante elementi di forme fondamentali omografiche di specie i, in queste forme si corrispondono pure i due spazi a $n-2$ dimensioni che congiungono rispett. S_{n-i-1}, S'_{n-i-1} coi rimanenti i punti del primo gruppo e cogli omologhi del secondo.

14. *Gruppi autoassociati*—Tra i vari casi particolari che possono presentare due gruppi associati, il più notevole è quello in cui un gruppo coincide coll'associato, essendo ciascun punto omologo a se stesso; diremo che il gruppo è *autoassociato*.

Proprietà caratteristica è la seguente:

Ogni quadrica (*) *di S_{n-1} la quale passi per $2n - 1$ punti di un gruppo autoassociato di $2n$ punti, passa anche per il punto rimanente.*

Infatti rispetto a una tal quadrica $2n - 1$ punti del gruppo sono autoconiugati; quindi anche l'ultimo punto del gruppo è coniugato di se stesso rispetto alla quadrica (9).

Reciprocamente: *$2n$ punti di S_{n-1} tali che ogni quadrica passante per $2n - 1$ tra essi passi per il rimanente, costituiscono un gruppo autoassociato* (**).

Ogni quadrica passante per $a_1 \ldots a_{2n-1}$ passi per a_{2n}. Consideriamo i due $(n - 1)$-goni $a_1 \ldots a_{n-1}$, $a_n \ldots a_{2n-2}$, ed indichiamo con $S^{(i)}_{n-3}$, $S^{(k)}_{n-3}$ le faccie del primo e del secondo $(n - 1)$-gono rispettivamente opposte ad a_i $(i = 1, 2 \ldots n - 1)$ e ad a_k $(k = n, n + 1, \ldots 2n - 2)$. I due fasci $S^{(i)}_{n-3}$, $S^{(k)}_{n-3}$ riferiti proiettivamente in guisa che si corrispondano gli spazi proiettanti a_i, a_k, a_{2n-1}, generano una quadrica la quale passando per i vertici dei due $(n - 1)$-goni e per a_{2n-1}, passa anche per a_{2n}; quindi

$$S^{(i)}_{n-3}\,(a_i a_k a_{2n-1} a_{2n}) \;\overline{\wedge}\; S^{(k)}_{n-3}\,(a_i a_k a_{2n-1} a_{2n}).$$

Le varie relazioni compendiate in questa ci autorizzano ad affermare che il gruppo $a_1 \ldots a_{2n}$ è associato a se stesso (8).

Due n-goni autoreciproci in una polarità di S_{n-1} dànno coi loro vertici (o colle loro faccie) *un gruppo autoassociato di S_{n-1}* (2).

I $2n$ punti di un gruppo autoassociato di S_{n-1} distribuiti (in un modo qualunque) *in due n-uple dànno due n-goni autoreciproci in una polarità* (7) (***).

(*) Per *quadrica* di S_{n-1} si intende varietà di secondo ordine a $n - 2$ dimensioni.

(**) Un esempio di un tal gruppo è offerto dalle $2n$ intersezioni di una quadrica con una curva ellittica d'ordine n di S_{n-1}.

(***) E da questi due teoremi: *Se in un gruppo autoassociato di S_{n-1} due punti coincidono* (in guisa che la loro congiungente sia indeterminata), *i rimanenti $2(n - 1)$ punti giacciono in un S_{n-2}, e vi formano un gruppo autoassociato.*

La curva razionale normale che passa per $n + 2$ punti di un gruppo autoassociato di $2n$ punti (giacenti in S_{n-1}), *sega in $n - 2$ punti lo spazio* (a $n - 3$ dimensioni) *dei rimanenti $n - 2$ punti del gruppo. Questi $n - 2$ punti colle $n - 2$ intersezioni danno un gruppo autoassociato di $2(n - 2)$ punti.* La prima parte del teorema segue da ciò, che gli $n + 2$ punti costituiscono sulla curva razionale che li contiene, una punteggiata proiettiva al fascio che proietta i punti stessi dallo spazio S_{n-3} dei rimanenti $n - 2$ punti del gruppo (5).

Per dimostrare la seconda parte, detto a uno dei primi $n + 2$ punti, si noti che il gruppo di $2(n - 1)$ punti giacente nello spazio ($a\ S_{n-3}$), e costituito dai $2(n - 2)$ punti dell'enunciato e dal punto a considerato come doppio, è autoassociato (11). Quindi, per l' ultima nota, quei $2(n - 2)$ punti costituiscono un gruppo autoassociato in S_{n-3}.

Il penultimo teorema e la prima parte dell'ultimo contengono come casi particolari due noti teoremi dello spazio S_3 dovuti ad Hesse (*).

Torino, aprile 1889

G. CASTELNUOVO.

(*) Accenniamo qui ad un altro caso interessante di gruppi associati. In due spazi a $n - 1$ dimensioni si trovino due curve ellittiche d'ordine n riferite univocamente. Si rappresentino i punti delle due curve mediante parametri in guisa che uno stesso parametro spetti a due punti corrispondenti; e sia λ la somma dei parametri di n punti della prima curva giacenti in uno spazio a $n - 2$ dimensioni, e μ l'analoga somma per la seconda curva. Ciò posto, $2n$ punti della prima curva i cui parametri diano per somma $\lambda + \mu$, e gli omologhi $2n$ punti della seconda curva, costituiscono due gruppi associati (8).

SULLA FUNZIONE POTENZIALE DELLA CIRCONFERENZA.

Nota del prof. **Eugenio Beltrami**, in Pavia.

Adunanza del 23 giugno 1889.

In una Nota *Sull'attrazione d'un anello circolare od ellittico*, pubblicata nel 1880 fra le Memorie della R. Accademia dei Lincei (serie 3ª, tomo V), ho stabilito diverse forme della funzione designata nel titolo del presente Articolo, mettendo in luce alcune singolari relazioni analitiche che si collegano colla genesi di tale funzione e che la rendono meritevole di qualche interesse, malgrado la semplicità della sua definizione e della sua natura. Mi propongo ora di ritornare su quell'argomento per completarne in alcuni punti la trattazione, tanto per ciò che concerne il significato meccanico della detta funzione, quanto per ciò che spetta alle rammentate relazioni di pura analisi che da essa traggono origine.

Sia a il raggio della circonferenza, la quale si suppone omogenea e di massa $= 1$. Si assuma come asse delle z l'asse medesimo della circonferenza, collocando l'origine nel centro di questa. Stante la simmetria del sistema intorno a quest'asse, è lecito supporre che il piano xz passi per il punto potenziato e che l'ascissa x di questo punto non sia mai negativa. Un punto qualunque della circonferenza può essere individuato dall'angolo che il raggio ad esso diretto fa coll'asse delle x negative. Denotando con ξ quest'angolo e con r la distanza del punto (ξ) dal punto potenziato (x, z), si ha

$$(1) \qquad r^2 = x^2 + z^2 + a^2 + 2ax\cos\xi$$

e, delle due espressioni

$$(1)_a \qquad u = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\xi}{r}\,, \qquad v = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi r\,d\xi\,,$$

la prima definisce l'ordinaria funzione potenziale newtoniana della c conferenza, la seconda quell'altra funzione potenziale che il **Lamé** proposto di chiamare *diretta* e la cui considerazione interviene u mente in parecchie questioni di fisica matematica. Una proprietà r tissima permette subito di scrivere questa notevole relazione fra le d funzioni

$$(1)_b \qquad \Delta_2 v = 2u\,,$$

dove il simbolo Δ_2, trattandosi di sistemi simmetrici intorno all'as delle z, rappresenta l'operazione

$$(1)_c \qquad \Delta_2 = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Ciò posto se, nelle due espressioni $(1)_a$, si scrive 2θ in luog di ξ e se si pone

$$(1)_d \qquad \rho^2 = (x-a)^2 + z^2\,, \qquad \rho'^2 = (x+a)^2 + z^2\,,$$

cosicchè ρ rappresenti la minima e ρ' la massima distanza del punt potenziato (x, z) dalla circonferenza (distanze che, al pari di r, si devono sempre considerare come essenzialmente positive), si trova subito

$$(2) \qquad u = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta + \rho'^2\cos^2\theta}}\,,$$

$$(2)_a \qquad v = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta + \rho'^2\cos^2\theta}\,.$$

La prima di queste due espressioni conduce immediatamente ad una semplicissima rappresentazione meccanica di quell'importante quan-

tità che Gauss ha denominato la *media aritmetico-geometrica* di due quantità date: se infatti si rappresenta con R la media aritmetico-geometrica di ρ e di ρ', si ha subito, dall'equazione fondamentale che Gauss ha stabilito per questa media,

$$u = \frac{1}{R}.$$

Le due espressioni (2), $(2)_a$ mostrano che tanto u quanto v sono funzioni omogenee (in senso lato) delle due distanze ρ e ρ', la prima di grado -1, la seconda di grado $+1$. Quest'osservazione, la quale per la funzione u si traduce nella relazione differenziale

$$(2)_b \qquad u + \rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho'\frac{\partial u}{\partial \rho'} = 0,$$

sarà utilmente invocata nel seguito.

Un'altra osservazione importante, e non meno semplice, è la seguente. Poichè le derivate negative di u rispetto ad x ed a z sono le espressioni delle due componenti, F_x ed F_z, della forza newtoniana F, l'una parallelamente al piano della circonferenza, l'altra parallelamente all'asse di questa, e poichè si ha d'altronde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos(\rho x) + \frac{\partial u}{\partial \rho'}\cos(\rho' x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos(\rho z) + \frac{\partial u}{\partial \rho'}\cos(\rho' z),$$

è evidente che la detta forza F si può anche considerare come la risultante di due, F_ρ ed $F_{\rho'}$, agenti secondo le due rette ρ e ρ' (che si intenderanno sempre dirette dal cerchio verso il punto potenziato) ed espresse da

$$(2)_c \qquad F_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho}, \qquad F_{\rho'} = -\frac{\partial u}{\partial \rho'}.$$

Queste due componenti, benchè non sieno della specie ordinaria,

cioè normali, sono tuttavia le più comode a considerarsi per la determinazione della forza F; nel che giova anche notare che basta calcolarne una sola, perchè $(2)_b$ fra di esse sussiste sempre la relazione

$$(2)_d \qquad \rho F_\rho + \rho' F_{\rho'} = u.$$

Ponendo

$$(3) \qquad k^2 = 1 - \frac{\rho^2}{\rho'^2}, \qquad k' = \frac{\rho}{\rho'}, \qquad k^2 + k'^2 = 1$$

ed usando i soliti simboli

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta}}, \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta},$$

si ha subito dalle formole (2), $(2)_a$

$$(3)_a \qquad u = \frac{2K}{\pi\rho'}, \qquad v = \frac{2\rho' E}{\pi}.$$

Mediante le note relazioni

$$(3)_b \qquad K = E - k\frac{dE}{dk}, \qquad E = k'^2\left(K + k\frac{dK}{dk}\right)$$

si ottengono di qui le seguenti espressioni delle derivate di u:

$$(3)_c \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{2}{\pi k^2 \rho\rho'}\,(k'^2 K - E), \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \rho'} = \dfrac{2}{\pi k^2 \rho'^2}\,(E - K). \end{cases}$$

Queste espressioni servono molto bene a riconoscere con precision l'andamento della forza newtoniana F nell'immediata prossimità dell linea donde essa emana.

È evidente infatti che la quantità E tende al limite 1 per

$$\lim \rho = 0 \qquad \text{e quindi} \qquad \lim k = 1,$$

ed è d'altronde ben noto che la quantità K, in questa stessa ipotesi $\lim k = 1$, diventa infinita logaritmicamente, e propriamente in guisa che la differenza

$$K - \log \frac{4}{k'}, \qquad \text{ossia} \qquad K - \log \frac{4\rho'}{\rho},$$

tende a zero con ρ. In base a ciò, se si osserva che, nelle stesse condizioni, ρ' tende verso il valore $2a$, si ottengono i seguenti valori delle componenti F_ρ ed $F_{\rho'}$, per ρ evanescente,

$$(3)_d \qquad F_\rho = \frac{1}{\pi a \rho}, \qquad F_{\rho'} = \frac{1}{2\pi a^2} \log \frac{8a}{e\rho},$$

dove e è la base neperiana. Questi valori, i quali non differiscono dai rigorosamente esatti se non di quantità che tendono a zero insieme con ρ, sono quelli stessi che si otterrebbero se si prendesse addirittura

$$u = \frac{2}{\pi\rho'} \log \frac{4\rho'}{\rho}$$

e si facesse $\rho' = 2a$ nei risultati delle due derivazioni rispetto a ρ ed a ρ'.

Di solito, nello studio delle distribuzioni newtoniane lineari, non si considera, rispetto ai punti potenziati prossimi alla linea, che la componente normale della forza totale secondo la minima distanza del punto dalla linea, componente la quale (in prossimità di un punto ordinario) si sa essere eguale al doppio della densità locale, diviso per la minima distanza anzidetta; e questa proprietà si considera a buon dritto come *caratteristica* delle distribuzioni lineari, nel senso ch'essa serve a determinare la densità per mezzo della forza e quindi della funzione potenziale. La prima delle formole $(3)_d$, benchè si riferisca ad una componente che in generale non è la componente ordinaria, o normale, della forza F secondo la minima distanza ρ, presenta anch'essa la proprietà ora enunciata; il che si comprende facilmente ove si osservi che la componente F_ρ, per $\lim \rho = 0$, è infinitamente grande non solo in sè stessa, ma eziandio rispetto all'altra componente $F_{\rho'}$.

Ma ciò che riesce utile di constatare è appunto il fatto che que-

sta seconda componente, pur essendo evanescente di fronte alla ma, ha tuttavia per sè stessa un valore infinitamente grande: cir stanza che, congiunta alla precedente, stabilisce, per esempio, un gr dissimo divario da ciò che accade rispetto alle distribuzioni superfici

Se fra ρ e ρ' si ponesse la relazione

$$\frac{\rho}{\rho'} = \text{Costante},$$

che è quanto dire

$$k' = \text{Costante},$$

e quindi anche

$$k = \text{Costante},$$

si individuerebbe la superficie d'un toro, su cui il punto potenzia (x, z), ovvero (ρ, ρ'), verrebbe a trovarsi collocato, toro il cui cerch meridiano sarebbe armonico al dato $(\rho = 0,\ \rho' = 2a)$; vale a di che questi cerchii avrebbero due diametri situati in una stessa ret e fra loro armonici, e giacerebbero in due piani fra loro perpendic lari. Sulla superficie di questo toro la funzione u è $(3)_a$ inversamen proporzionale a ρ' (oppure a ρ) e la forza F ha, tangenzialmente a que sta superficie, una componente la cui espressione, molto semplice, è

$$= \frac{\operatorname{sen}(\rho, \rho')}{2a} u, \qquad \text{ovvero} \qquad = \frac{\operatorname{sen}(\rho, \rho')}{2a\rho'} K.$$

Non mi trattengo a dimostrare questa formola; ma ho voluto quì ripo tarla perchè , nel caso di ρ molto piccolo, essa rappresenta una com ponente che riesce molto prossimamente perpendicolare a quella ch si suole considerare (la componente normale secondo ρ) e che serv quindi, insieme con questa, a rendere compiuta la cognizione dell'anda mento della forza in prossimità della circonferenza.

È chiaro del resto che, volendo decomporre la forza F second il raggio ρ e secondo la perpendicolare a questo raggio, si otterrebbero du componenti ordinarie, o normali, rispettivamente rappresentate da

$$F_\rho + F_{\rho'} \cos(\rho, \rho') \qquad \text{e da} \qquad F_{\rho'} \operatorname{sen}(\rho, \rho')$$

dove

$$\cos(\rho, \rho') = \frac{\rho^2 + \rho'^2 - 4a^2}{2\rho\rho'}.$$

Ritornando ora alle equazioni $(3)_c$, si osservi che, tenendo conto della seconda relazione $(3)_b$, esse possono scriversi così:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{2}{\pi \rho \rho'} \frac{\partial (E\rho')}{\partial \rho'}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{2}{\pi \rho} \frac{\partial E}{\partial \rho},$$

talchè si hanno $(3)_a$ le due eguaglianze seguenti:

$$(4) \qquad \rho \rho' \frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{\partial v}{\partial \rho'}, \qquad \rho \rho' \frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

Ne consegue che la funzione u soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$(4)_a \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \rho' \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho'}\left(\rho \rho' \frac{\partial u}{\partial \rho'}\right),$$

mentre la funzione v soddisfa all'altra equazione

$$(4)_b \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho \rho'} \frac{\partial v}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho'}\left(\frac{1}{\rho \rho'} \frac{\partial v}{\partial \rho'}\right).$$

La prima di queste due equazioni è riducibile a quella che venne trovata da Borchardt (*Werke*, pag. 129) per l' inversa della media aritmetico-geometrica, considerata come funzione dei due numeri fra i quali si prende la media stessa.

Il nesso fra le due forme dell' equazione in discorso è stabilito dall'eguaglianza $(2)_b$. Infatti, sottraendo l'una dall'altra le due derivate di quest'eguaglianza rispetto a ρ ed a ρ', dopo aver moltiplicato la prima per ρ' e la seconda per ρ, si ottiene

$$\left(\rho'^2 - \rho^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho'} + \rho \rho' \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \rho'^2}\right) + 2\left(\rho' \frac{\partial u}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial u}{\partial \rho'}\right) = 0,$$

donde consegue, in virtù di $(4)_a$, la duplice eguaglianza

$$(4)_c \qquad \rho \rho' \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \rho'^2}\right) = \rho \frac{\partial u}{\partial \rho'} - \rho' \frac{\partial u}{\partial \rho} = \left(\rho'^2 - \rho^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho'}.$$

L'equazione $(4)_a$ risulta dal confronto della prima colla seconda di queste tre quantità eguali: l'equazione di Borchardt risulta in-

vece dal confronto della prima colla terza. Il confronto della seconc colla terza quantità conduce ad un'altra notevolissima equazione, ch verrà considerata in seguito.

L'equazione $(4)_a$ si trova già nella citata mia Nota, dove ne ave pure concluso che l'espressione

$$\rho\rho'\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\, d\rho' + \frac{\partial u}{\partial \rho'}\, d\rho\right)$$

doveva essere un differenziale esatto, ma senza pensare alla ricerca c corrispondente integrale: ora si vede che questo integrale non è a tro (4) che $-v$. Si può osservare a questo proposito che, una vol stabilita l'equazione $(4)_a$, che fra breve procederò a dimostrare dirett mente, l'integrale della precedente espressione differenziale si può c tenere colla semplicissima considerazione seguente. Per essere u fu zione omogenea di grado -1, le due espressioni

$$\rho\rho'\frac{\partial u}{\partial \rho'} \qquad \text{e} \qquad \rho\rho'\frac{\partial u}{\partial \rho}$$

sono necessariamente omogenee di grado zero, epperò la funzione cui esse, a tenore dell'equazione $(4)_a$, devono essere le derivate parzia non può essere (salvo una costante additiva) che omogenea anch'es di grado 1: questa funzione deve dunque ammettere l'espressione

$$\rho\rho'\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\, \rho' + \frac{\partial u}{\partial \rho'}\, \rho\right),$$

ossia, tenendo conto del valore (2) di u,

$$-\frac{2\rho^2\rho'^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta + \rho'^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ora quest'ultima espressione si può precisamente trasformare in que di $-v$, e ciò mediante un noto artificio, il quale si riduce, in sostan all'uso della seconda relazione $(3)_b$.

Ma ciò che più importa è di stabilire direttamente l'equazione $(4)_a$, il che ora farò, completando una deduzione che ho in parte già data nella Nota del 1880 e da cui risulta questa interessante proposizione che *l'equazione a derivate parziali della media aritmetico-geometrica non è altro che una trasformata dell'equazione di Laplace.*

Per dimostrare questa proposizione bisogna formare l'espressione Δ_2 colle variabili ρ, ρ' e ciò si fa nel modo seguente.

Dalle equazioni $(1)_a$ risulta

$$\rho^2 + \rho'^2 = 2(x^2 + z^2 + a^2), \qquad \rho'^2 - \rho^2 = 4ax,$$

cosicchè, ponendo

$$\rho' - \rho = 2\sigma, \qquad \rho' + \rho = 2\sigma',$$

donde

$$\rho = \sigma' - \sigma, \qquad \rho' = \sigma' + \sigma,$$

si ottiene

$$\sigma^2 + \sigma'^2 = x^2 + z^2 + a^2, \qquad \sigma\sigma' = ax.$$

Differenziando totalmente queste due equazioni, ricavandone i valori di dx, dz espressi per $d\sigma$, $d\sigma'$ e sostituendo questi valori nel secondo membro dell'equazione

$$ds^2 = dx^2 + dz^2,$$

si trova che il termine in $d\sigma d\sigma'$ svanisce, a cagione dell'eguaglianza

$$z^2 = \frac{(a^2 - \sigma^2)(\sigma'^2 - a^2)}{a^2},$$

e si ottiene in tal guisa

$$ds^2 = (\sigma'^2 - \sigma^2)\left(\frac{d\sigma^2}{a^2 - \sigma^2} + \frac{d\sigma'^2}{\sigma'^2 - a^2}\right).$$

Quest'espressione dell'elemento lineare ds corrisponde all'uso delle coordinate ellittiche σ, σ' nel piano meridiano xz. Tenendo conto della ammessa simmetria del sistema intorno all'asse delle z, si deduce facilmente, dalla nota formola di Lamé o di Jacobi, la seguente equa-

zione del Δ_2 di una qualunque funzione di σ e di σ':

$$(\sigma'^2 - \sigma^2)\,\Delta_2\varphi$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-\sigma^2}}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma\sqrt{a^2-\sigma^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right) + \frac{\sqrt{\sigma'^2-a^2}}{\sigma'}\frac{\partial}{\partial\sigma'}\left(\sigma'\sqrt{\sigma'^2-\right.$$

Eseguendo le derivazioni indicate si trova

$$\rho\rho'\Delta_2\varphi = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma'^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} - \frac{1}{\sigma'}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma'}\right)$$

$$+ \sigma'\left(\sigma'\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma'^2} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma'}\right) - \sigma\left(\sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right),$$

o meglio

$$\rho\rho'\Delta_2\varphi = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma'^2}\right) + \frac{a^2}{\sigma\sigma'}\left(\sigma'\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma'}\right) + \sigma'\frac{\partial\psi}{\partial\sigma'} -$$

dove si è posto

$$\psi = \varphi + \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + \sigma'\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma'};$$

e ritornando dalle variabili σ, σ' alle ρ, ρ' si ottiene facilmente

$$\rho\rho'\Delta_2\varphi = \frac{4a^2}{\rho'^2-\rho^2}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho'} - \rho'\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) - 4a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial\rho'} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho'} + \rho'$$

od anche

$$\rho\rho'(\rho'^2-\rho^2)\Delta_2\varphi = 4a^2\left\{\rho\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\varphi + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) - \rho'\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\varphi + \rho'\frac{\partial\varphi}{\partial\rho'}\right.\right.$$

$$+ (\rho'^2-\rho^2)\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho'} + \rho'\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right),$$

dove ψ riceve ora l'espressione

$$(5) \qquad \psi = \varphi + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial\varphi}{\partial\rho'}.$$

Utilizzando nuovamente questa espressione medesima, si giunge finalmente alla seguente equazione definitiva

$$(5)_a \qquad \rho\rho'(\rho'^2 - \rho^2)\Delta_2\varphi = \frac{\partial}{\partial\rho}\left\{ 4a^2\rho\rho'\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + (\rho'^2 - \rho^2 - 4a^2)\rho'\psi \right\}$$

$$- \frac{\partial}{\partial\rho'}\left\{ 4a^2\rho\rho'\frac{\partial\varphi}{\partial\rho'} + (\rho^2 - \rho'^2 - 4a^2)\rho\,\psi \right\}.$$

Questo risultato è più completo di quello cui ero pervenuto nella Nota più volte citata, perchè in questa avevo solamente trasformata l'equazione $\Delta_2 = 0$; inoltre la forma sotto cui avevo posto quest'equazione era meno semplice di quella che risulta dalla precedente espressione generale del Δ_2. Ritenuta la quale, l'equazione $(1)_b$ si traduce nella seguente relazione fra le due quantità K ed E:

$$\Delta_2(E\rho') = \frac{2K}{\rho'}.$$

Se si suppone che la funzione φ sia la stessa u, e se si osserva che in tal caso si ha non solo $\Delta_2\varphi = 0$, ma anche $(2)_b$ $\psi = 0$, si ottiene subito, come equazione differenziale per u, la già incontrata equazione $(4)_a$ della media aritmetico-geometrica : ed è così che si giunge a stabilire direttamente questa equazione.

Mostrerò ora come si possa da questa trarre partito in un'altra ricerca, che si collega naturalmente coll'argomento quì trattato.

Poichè u è la funzione potenziale della circonferenza omogenea di massa 1 e di raggio a, è chiaro che $2\pi u a da$ è l'analoga funzione rispetto alla corona circolare piana compresa fra le due circonferenze di raggi a ed $a + da$, supponendo $= 1$ la densità superficiale. Per conseguenza

$$2\pi\int_0^a u a da$$

è la funzione potenziale del disco circolare di raggio a e di densità 1, ed

$$U = -2\pi\int_0^a \frac{\partial u}{\partial z} a da$$

è la funzione potenziale dello strato magnetico circolare di raggi e di momento costante $= 1$, ossia la funzione potenziale elettroma tica della corrente circolare di raggio a e di intensità $= 1$. Questa zione è di un più elevato grado di trascendenza che non sieno le quì considerate, ma la sua *associata* V, cioè quella funzione che essa legata dalle relazioni

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -x \frac{\partial U}{\partial x},$$

si può esprimere colle funzioni u, v. Si ha infatti (naturalmente punti situati fuori dello strato magnetico)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi x \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} a\,da, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 2\pi x \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} a\,da.$$

Ma, poichè la funzione U soddisfa all'equazione di Laplace e qui $(1)_c$ alla relazione

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

si può anche scrivere

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2\pi \int_0^a \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) a\,da, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 2\pi \int_0^a \frac{\partial}{\partial z}\left(x \frac{\partial u}{\partial z}\right) a\,da$$

ne consegue che si può prendere per V l'espressione

$$V = 2\pi x \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} a\,da, \tag{6}$$

la quale si presta ad una riduzione che non potrebbe effettuarsi su funzione U.

Effettivamente, si ha $(1)_d$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \rho'}\frac{\partial \rho'}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho'}\frac{\partial \rho'}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial a},$$

epperò, rammentando la già invocata relazione

$$\rho'^2 - \rho^2 = 4ax,$$

si può anche scrivere

$$V = \frac{\pi}{2}\int(\rho'^2 - \rho^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \rho'}d\rho' - \frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho\right),$$

dove l'integrazione dev'essere estesa da $\rho = \rho'$ (relazione che corrisponde ad $a = 0$) a quella coppia di valori di ρ e ρ' che risultano dalle formole $(1)_d$ per a eguale al raggio dello strato magnetico, o della corrente. Ora è facile dimostrare che il risultato di questa integrazione è indipendente da qualsivoglia relazione fra le variabili ρ e ρ', poichè la espressione sotto il segno integrale, cioè

$$(6)_a \qquad (\rho'^2 - \rho^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \rho'}d\rho' - \frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho\right)$$

è un differenziale esatto.

Infatti la duplice eguaglianza $(4)_c$, la quale, come ho già notato, fornisce tanto l'equazione $(4)_a$ quanto l'equazione di Borchardt, fornisce anche una terza equazione, cui ho pur fatto allusione. Quest'equazione, che risulta dal confronto del secondo col terzo membro, è facilmente riducibile alla forma

$$(6)_b \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left\{(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial u}{\partial \rho'}\right\} + \frac{\partial}{\partial \rho'}\left\{(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial u}{\partial \rho}\right\} = 0$$

e mette appunto in evidenza l'integrabilità dell'espressione $(6)_a$.

D'altronde, riconosciuta questa proprietà, è facilissimo ottenere l'espressione dell'integrale, mediante una considerazione che è già stata precedentemente invocata. Le due derivate rispetto a ρ' ed e ρ della cercata funzione integrale, cioè le espressioni

$$(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial u}{\partial \rho'}, \qquad -(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial u}{\partial \rho},$$

sono omogenee e di grado zero rispetto a ρ ed a ρ', epperò, astrazion fatta da una costante additiva, quella funzione dev'essere omogenea e di grado 1, cioè dev'essere esprimibile nella forma

$$(\rho'^2 - \rho^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \rho'}\rho' - \frac{\partial u}{\partial \rho}\rho\right).$$

Ora quest'espressione si annulla al limite inferiore $\rho = \rho'$: si può dunque porre senz'altro

$$(6)_c \qquad V = \frac{\pi}{2}(\rho'^2 - \rho^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \rho'}\rho' - \frac{\partial u}{\partial \rho}\rho\right).$$

Introducendo i valori $(3)_c$ delle derivate di u, si giunge così all'espressione

$$(6)_d \qquad V = \rho'\{2E + (k^2 - 2)K\},$$

la quale s'accorda perfettamente con quella che già si conosce e che di solito si deduce da altre considerazioni.

Si può osservare che, sostituendo nell'espressione $(6)_c$ la funzione v $(2)_a$ alla u, mediante le relazioni (4), V si presenta sotto la forma

$$V = (\rho'^2 - \rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{\rho'^2 \operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\cos^2\theta}}\, d\theta,$$

nella quale figura un integrale che è stato ripetutamente considerato da Gauss nella *Determinatio attractionis* etc. (*Werke*, t. III) ed il cui valore si collega strettamente colla considerazione della media aritmetico-geometrica.

Ho lasciato finquì in disparte l'equazione differenziale $(4)_b$, cui soddisfa la funzione v: ripiglierò ora questa equazione per ricavarne una conclusione interessante.

Procedendo con quello stesso metodo con cui si giunse alle eguaglianze $(4)_c$, si ottengono per v queste altre eguaglianze analoghe

$$\rho\rho'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \rho'^2}\right) = \rho'\frac{\partial v}{\partial \rho} - \rho\frac{\partial v}{\partial \rho'} = -(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \rho'}.$$

Il confronto delle due prime di queste tre espressioni eguali riproduce l'equazione $(4)_b$: il confronto delle due ultime conduce invece ad un'equa-

zione che è assolutamente identica alla $(6)_b$, salvo il mutamento di u in v. Ne risulta che *l'equazione a derivate parziali*

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left\{(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial w}{\partial \rho'}\right\} + \frac{\partial}{\partial \rho'}\left\{(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial w}{\partial \rho}\right\} = 0$$

è soddisfatta tanto da $w = u$ quanto da $w = v$. Effettivamente, sostituendo successivamente per w in quest'equazione i due valori $(3)_a$, si ottengono le due note equazioni differenziali ordinarie cui soddisfanno le quantità K ed E, considerate come funzioni del modulo k. Queste due equazioni non hanno la medesima forma: invece l'equazione (7) esprime una proprietà comune ai due integrali (2), $(2)_a$, considerati come funzioni di ρ e ρ'.

È degno d'essere notato che, se si introducono in luogo di ρ e ρ' le già usate variabili σ e σ', l'equazione (7) si converte nella seguente:

$$(7)_a \qquad \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\sigma\sigma'\frac{\partial w}{\partial \sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial \sigma'}\left(\sigma\sigma'\frac{\partial w}{\partial \sigma'}\right),$$

cioè assume la stessa forma della $(4)_a$, rispetto a queste nuove variabili σ e σ'. Ne risulta che l'equazione (7) è soddisfatta anche dalla funzione

$$w = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\rho' - \rho)^2 \operatorname{sen}^2\theta + (\rho' + \rho)\cos^2\theta}},$$

cioè dalla inversa media aritmetico-geometrica dei due numeri $\rho' - \rho$ e $\rho' + \rho$. E dal confronto delle equazioni (7), $(7)_a$ segue pure che l'equazione $(4)_a$ è soddisfatta non solo dalla funzione u, ma anche da quest'altra

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{(\rho' - \rho)^2 \operatorname{sen}^2\theta + (\rho' + \rho)^2 \cos^2\theta}.$$

Terminerò questa Nota giovandomi delle proprietà della funzione u per indicare la forma che si può dare al teorema di Green, rispetto alle funzioni potenziali simmetriche intorno ad un asse.

Quest'asse di simmetria sia sempre quello delle z, e sia φ una

funzione monodroma, continua e finita, insieme colle sue derivate pı me, e soddisfacente all'equazione di Laplace nello spazio limitato ‹ una superficie chiusa di rotazione intorno al detto asse, superficie cł dirò σ e di cui denoterò con s l'arco di linea meridiana giacente nell metà positiva ($x > 0$) del piano xz. Sieno $x = a$, $z = c$ le coord nate d'un punto appartenente a quella porzione, di questa stessa met positiva del piano xz, che giace entro la superficie σ. Questo punto rotando intorno all'asse delle z, genera una circonferenza, lungo l quale la funzione φ ha costantemente, per l'ipotesi che si vuol qu considerare, il valore $\varphi(a, c)$; e questa circonferenza, supposta material e propriamente omogenea e di massa totale $= 1$, ha la funzione poten ziale u_c, dove u_c denota (provvisoriamente) ciò che diventa la fun zione u, delle formole (2) oppure $(3)_a$, qualora si ponga $z - c$ a posto di z.

Descrivendo ora intorno al punto (a, c) del piano xz, ed ir questo stesso piano, una circonferenza s' di raggio piccolissimo, e de notando con σ' la superficie di rotazione di cui questa circonferenz è la linea meridiana, si può applicare allo spazio compreso fra le du superficie σ e σ' la nota equazione

$$\int\left(\varphi\frac{\partial u_c}{\partial n} - u_c\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma + \int\left(\varphi\frac{\partial u_c}{\partial n'} - u_c\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)d\sigma' = 0,$$

dove n è la normale interna alla superficie σ ed n' la normale esterna alla superficie σ'. Essendo u_c funzione potenziale simmetrica, e tale essendosi supposta anche φ, quest'equazione si può manifestamente ridurre a quest'altra

$$\int\left(\varphi\frac{\partial u_c}{\partial n} - u_c\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)x\,ds + \int\left(\varphi\frac{\partial u_c}{\partial n'} - u_c\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)x'\,ds' = 0,$$

in cui le due funzioni φ ed u_c sono formate colle sole coordinate x e z della linea s ed x' e z' della linea s', rispettivamente, ed in cui n ed n' sono le normali, rispettivamente interna ed esterna, a queste due linee, nel piano xz. Ma considerando la normale n' come un raggio del cerchietto s', intendendola, come tale, individuata da un

angolo azimutale η, e ponendo $ds' = n'd\eta$, il secondo termine della precedente equazione diventa

$$\int_0^{2\pi} x'\left(\varphi \frac{\partial u_c}{\partial n'} n' - u_c n' \frac{\partial \varphi}{\partial n'}\right) d\eta;$$

e poichè, per lim $n' = 0$ e quindi lim $x' = a$, si sa essere

$$\lim\,(x' u_c n') = 0, \qquad \lim\left(x' \frac{\partial u_c}{\partial n'} n'\right) = -\frac{1}{\pi},$$

mentre φ tende verso il valore $\varphi(a, c)$ e la derivata normale di φ si conserva, per ipotesi, continua e finita, è chiaro che il testè trascritto integrale tende, nelle ora indicate condizioni, verso il valore $2\varphi(a, c)$. Si ottiene in tal modo, mutando a e c in x_0 e z_0, la formola

$$(8) \qquad \varphi(x_0, z_0) = \frac{1}{2}\int\left(\varphi \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) x\, ds, \qquad (x_0 \gtreqq 0),$$

Ho qui soppresso l'indice c di u, perchè, non dipendendo l'espressione (2), ovvero la prima delle $(3)_a$, che da ρ e ρ', si può e giova ora concepire la funzione u come formata coi due seguenti elementi: 1°) la distanza ρ del punto generico (x, z) del contorno s da quel particolar punto interno (x_0, z_0) al quale s'intende riferito, nel primo membro, il valore della funzione φ; 2°) la distanza ρ' del predetto punto generico dal punto $(-x_0, z_0)$, simmetrico del precedente rispetto all'asse delle z.

La formola (8) si deve riguardare come l'analoga di quella di Green, rispetto alle funzioni potenziali simmetriche.

Per i punti situati sull'asse (quando una parte di questo è interna a σ) questa formola ricade esattamente in quella di Green, poichè per tali punti la funzione u è semplicemente l'inversa di ρ.

Va da sè che il primo membro dell'equazione (8) dev'essere sostituito dallo zero, se il punto (x_0, z_0) è esterno alla superficie σ.

Pavia, 15 giugno 1889.

E. BELTRAMI.

LISTE DES TRAVAUX MATHÉMATIQUES

DE

Georges-Henri HALPHEN. (*)

Les années indiquées sont celles de la publication.

I. — Géométrie des complexes et des congruences de droites.

N.os | Années

1. Sur le nombre des droites qui satisfont à des conditions données 1869

   Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXVIII, p. 142 (4 pages).

2. Sur les droites qui satisfont à des conditions données . . 1871

   Comptes rendus, t. LXXIII, p. 1441 (4 pages).

3. Sur les droites qui satisfont à des conditions données. . . 1872

   Comptes rendus, t. LXXIV, p. 41 (4 pages).

(*) Né à Rouen le 30 octobre 1844, mort à Versailles le 21 mai 1889.—Élève de l'École Polytechnique (1862-1864) et de l'École d'application du génie et de l'artillerie à Metz (1864-1866). — Officier d'artillerie (lieutenant 1866, capitaine 1871, chef d'escadron 1884). — Décoré de la Légion d'Honneur (chevalier 1871, officier 1889). — Docteur ès sciences mathématiques (1878). — Répétiteur du Cours d'Analyse à l'École Polytechnique (1873-1884). — Examinateur d'admission à l'École Polytechnique (1884-1886). — Membre du Conseil de perfectionnemeut de l'École Polytechnique (1888). — Lauréat de l'Institut de France (Grand Prix des Sciences mathéma-

N.os		Années
4.	Applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites	1873

Bulletin de la Société mathématique de France, t. I, p. 253 (4 pages).

II. — THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES POUR LES CONIQUES.

5.	Sur les caractéristiques dans la théorie des coniques sur le plan et dans l'espace, et des surfaces du second ordre.	1873

Comptes rendus, t. LXXVI, p. 1074 (4 pages).

6. 7. 8.	Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre, en trois parties	1873

Bulletin de la Société mathématique, t. I, p. 130 et 226; t. II, p. 11 (48 pages).

9.	Sur les caractéristiques des systèmes de coniques	1876

Comptes rendus, t. LXXXIII, p. 537 (4 pages).

10.	Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre.	1876

Comptes rendus, t. LXXXIII, p. 886 (4 pages).

11. 12.	Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques .	1877

Proceedings of the London Mathematical Society, t. IX, nos 133 et 134 (23 pages). — Mathematische Annalen, t. XV, p. 16.

---

tiques 1881, Prix Poncelet 1883, Prix Petit d'Ormoy pour les Sciences mathématiques 1885) et de l'Académie Royale des Sciences de Berlin (Prix Steiner 1882). — Membre de la Société Mathématique de France (1872) et de la Société Philomatique de Paris (1874). — Président de la Société Mathématique de France (pour l'année 1882). — Membre de l'Institut de France (Académie des Sciences, Section de Géométrie) (1886). — Associé étranger de l'Académie Royale *dei Lincei* de Rome (1887). — Membre de la Société Royale des Sciences de Liège (1885) et de l'Académie Royale des Sciences de Copenhague (1889). — Membre de l'Association Française pour l'avancement des Sciences, de l'Association Britannique pour l'avancement des Sciences, de la Société Philosophique et Littéraire de Manchester, etc. etc.

N.os Ans

13. Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre 18

Journal de l'École Polytechnique, XLVe Cahier, p. 27 (63 pages).

14. Sur le nombre des coniques qui, dans un plan, satisfont à cinq conditions projectives et indépendantes entre elles. 18

Proceedings of the London Mathematical Society, t. X, nos 145 et 146 (13 pages).

15. Observations sur la théorie des caractéristiques 187

Bulletin de la Société mathématique, t. VIII, p. 31 (4 pages). Réponse de M. Schubert (*Ibid.*, p. 60).

III. — Théorie générale des courbes algébriques.

16. Sur les points singuliers des courbes algébriques planes. . 187

Comptes rendus, t. LXXVIII, p. 1105 (3 pages).

17. Sur un point de la théorie des fonctions abéliennes . . . 187

Comptes rendus, t. LXXVIII, p. 1833 (4 pages).

18. Sur certaines perspectives gauches des courbes planes algébriques. 18

Comptes rendus, t. LXXX, p. 638 (4 pages).

19. Sur le genre des courbes algébriques 18

Association française. Compte rendu de la quatrième session (Nantes), p. 237 (8 pages).

20. Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes. 18

Bulletin de la Société mathématique, t. IV, 2p. 9 (13 pages).

21. Sur les points d'une courbe ou d'une surface qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle ou aux derivées partielles 18

Comptes rendus, t. LXXXI, p. 1053 (3 pages).

N.os		Années
22.	Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier . . . . Bulletin de la Société mathématique, t. III, p. 76 (17 pages).	1875
23.	Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré. . . . . Bulletin de la Société mathématique, t. IV, p. 59 (26 pages).	1875
24.	Sur les correspondances entre les points de deux courbes. Bulletin de la Société mathématique, t. V, p. 7 (11 pages).	1876
25.	Sur une série de courbes, analogues aux développées. . . Journal de Mathématiques, 3e série, t. II, p. 87 (58 pages).	1876
26.	Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique et sur les questions analogues dans l'espace. . . . . Journal de Mathématiques, 3e série, t. II, p. 257 et 371 (72 pages).	1876
27.	Sur les points singuliers des courbes algébriques planes. . Recueil des Savants étrangers, t. XXVI (112 pages).	1877
28.	Sur les lignes singulières des surfaces algébriques . . . . Annali di Matematica pura ed applicata, 2e série, t. IX, pag. 68 (38 pages).	1877
29.	Sur les points singuliers des courbes gauches. . . . . . . Association française. Compte rendu de la sixième session (le Havre), p. 132 (10 pages).	1877
30.	Sur les singularités des courbes gauches algébriques . . . Bulletin de la Société mathématique, t. VI, p. 10 (17 pages).	1877
31.	Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes. Appendice au Traité de Géométrie analytique (Courbes planes), par G. Salmon, Ouvrage traduit de l'anglais par O. Chemin; Paris, Gauthier-Villars, 1884 (144 pages).	1884

IV. — Classification des courbes gauches algébriques.

N.os | Années

32. Mémoire sur les courbes gauches algébriques (Extrait) . . 1870

Comptes rendus, t. LXX, p. 380 (4 pages).

33. Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre . 1872

Bulletin de la Société mathématique, t. I, p. 19 (2 pages).

34. Recherches de Géométrie à n dimensions. 1873

Bulletin de la Société mathématique, t. II, p. 34 (19 pages).

35. Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques . 1874

Bulletin de la Société mathématique, t. II, p. 69 (4 pages).

36. Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques (couronné par l'Académie de Berlin) 1882

Journal de l'École Polytechnique, LII^e Cahier, p. 1 (200 pages).

V. — Équations différentielles et invariants.

37. Sur l'intégration des équations linéaires. 1864

Comptes rendus, t. LVIII, p. 471 (4 pages).

38. Sur les invariants différentiels. 1878

Thèse. Paris, Gauthier-Villars; 1878 (61 pages).

39. Sur les invariants différentiels des courbes gauches. 1880

Journal de l'École Polytechnique, XLVII^e Cahier, p. 1 (102 pages).

40. Sur une classe d'équations différentielles linéaires 1881

Comptes rendus, t. XCII, p. 779 (3 pages).

41. Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss 1881

Comptes rendus, t. XCII, p. 856 (3 pages).

42. Sur un système d'équations différentielles. 1881

Comptes rendus, t. XCII, p. 1101 (3 pages).

N.os		Années
43.	Sur certains systèmes d'équations différentielles	1881
	Comptes rendus, t. XCII, p. 1404 (3 pages).	
44.	Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables (couronné par l'Académie des Sciences).	1883
	Recueil des Savants étrangers, t. XXVIII (301 pages).	
45.	Sur quelques équations différentielles linéaires du quatrième ordre.	1883
	Comptes rendus, t. XCVII, p. 247 (3 pages).	
46.	Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre	1883
	Acta Mathematica, t. III, p 325 (56 pages).	
47.	Sur une équation différentielle linéaire du troisième ordre. (Extrait d'une Lettre adressée à M. F. Klein.)	1884
	Mathematische Annalen, t. XXIV, p. 461 (4 pages).	
48. 49. 50.	Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires (3 notes). . . . . 1883 et	1884
	Comptes rendus, t. XCVII, p. 1408 et 1541, et t. XCVIII, p. 134 (9 pages).	
51.	Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires.	1885
	Journal de Mathématiques, 4e série, t. I, p. 11 (75 pages).	
52.	Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires	1885
	Comptes rendus, t. CI, p. 664 (3 pages).	
53.	Sur une nouvelle classe d'équations différentielles linéaires intégrables	1885
	Comptes rendus, t. CI, p. 1238 (3 pages).	

VI. — Fonctions elliptiques.

N.os		Années
65.	Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. — *Première Partie*: Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en séries	1886
	Un volume grand in-8 de pages VIII-492. Paris, Gauthier-Villars, 1886.	
66.	Sur le problème de Gauss, concernant l'attraction d'un anneau elliptique	1886
	Comptes rendus, t. CIII, p. 363 (4 pages).	
67.	Sur le mouvement d'un solide dans un liquide.	1887
	Comptes rendus, t. CIV, p. 807 (4 pages).	
68.	Un théorème sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution allongé	1887
	Comptes rendus, t. CV, p. 535 (1 page).	
69.	Un théorème sur les arcs des lignes géodésiques des surfaces de révolution du second degré.	1887
	Comptes rendus, t. CV, p. 583 (2 pages).	
70.	Sur le mouvement d'un solide dans un liquide.	1888
	Journal de Mathématiques, 4e série, t. IV, p. 5 (77 pages).	
71.	Sur l'équation d'Euler (Extrait d'une Lettre adressée à M. G.-B. Guccia)	1888
	Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. II, p. 40 (5 pages).	
72.	Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. — *Deuxième Partie*: Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral.	1888
	Un volume grand in-8 de pages 659. Paris, Gauthier-Villars, 1888.	
73.	Sur les intégrales pseudo-elliptiques.	1888
	Comptes rendus, t. CVI, p. 1263 (8 pages).	

VII. — Théorie des nombres.

VIII. — Théorie des séries.

N.os | | Années

84. Sur quelques séries pour le développement des fonctions à une seule variable 1881

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 2e série, t. V, p. 462 (27 pages).

85. Sur une série d'Abel 1881

Comptes rendus, t. XCIII, p. 1003 (3 pages).

86. Sur une série d'Abel 1881

Bulletin de la Société mathématique, t. X, p. 67 (21 pages).

87. Sur une série pour développer les fonctions d'une variable. 1882

Comptes rendus, t. XCV, p. 609 (3 pages).

88. 89. Sur la série de Fourier . . . . 1882 et 1883

Comptes rendus, t. XCV, p. 1217, et t. XCVI, p. 188.

IX. — Sujets divers.

90. Sur le mouvement d'une droite. 1873

Bulletin de la Société mathématique, t. I, p. 114 (3 pages).

91. Sur un problème de probabilités 1873

Bulletin de la Société mathématique, t. I, p. 221 (3 pages).

92. Sur le déplacement d'un solide invariable 1874

Bulletin de la Société mathématique, t. II, p. 56 (7 pages).

93. Sur un point de la théorie du contact 1874

Bulletin de la Société mathématique. t. II, p. 94 (3 pages).

94. Sur le contact des surfaces 1874

Bulletin de la Société mathématique, t. III, p. 28 (10 pages).

95. Propriétés relatives à la courbure de la développée d'une surface quelconque 1875

Comptes rendus, t. LXXX, p. 116 (4 pages).

N.os — Années

96. Sur un point de la théorie des surfaces 1875

Comptes rendus, t. LXXX, p. 258 (4 pages).

97. Sur les ordres et les classes de certains lieux géométriques. 1876

Comptes rendus, t. LXXXIII, p. 705 (4 pages).

98. Sur une proposition générale de la théorie des coniques. (Cette proposition est due à Steiner). 1876

Comptes rendus, t. LXXXIII, p. 791 (3 pages).

99. Théorèmes concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation 1876

Bulletin de la Société mathématique, t. IV, p. 94 (2 pages).

100. 101. Deux théorèmes énoncés sans démonstration dans les procés verbaux de la Société mathématique . . 1875 et 1877

Bulletin de la Société mathématique, t. III, p. 183, et t. VI, p. 79.

102. Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches, douées de deux directrices rectilignes. 1877

Bulletin de la Société mathématique, t. V, p. 134 (2 pages).

103. Sur les lois de Kepler, solution d'un problème proposé par M. J. Bertrand 1877

Comptes rendus, t. LXXXIV, p. 939 (3 pages).

104. Sur une proposition d'Algèbre 1877

Bulletin de la Société mathématique, t. V, p. 160 (3 pages).

105. Sur les lois de Kepler 1878

Bulletin de la Société philomathique, 7e série, t. I, p. 89 (2 pages).

106. Sur la réduction de certaines équations différentielles. . . 1878

Comptes rendus, t. LXXXVII, p. 471 (3 pages).

107. Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide 1879

Bulletin de la Société mathématique, t. VIII, p. 18 (2 pages).

N.os		Années
108.	Sur l'équation différentielle des coniques	1879
	Bulletin de la Société mathématique, t. VII, p. 83 (1 page).	
109.	Sur une formule d'Analyse	1880
	Bulletin de la Société mathématique, t. VIII, p. 62 (3 pages).	
110. 111. 112.	Sur un critérium relatif à la théorie des coniques	1881
	Bulletin de la Société philomathique de 1882; Nouvelles Annales de 1882; et Comptes rendus de l'Association britannique (York, 1881).	
113.	Sur la théorie du déplacement.	1883
	Nouvelles Annales, 3e série, t. I (4 pages).	
114.	Formules d'Algèbre, résolution des équations du troisième et du quatrième degré	1885
	Nouvelles Annales, 3e série, t. IV (20 pages).	
115.	Notice sur les travaux mathématiques de M. G.-H. Halphen	1885
	Paris, Gauthier-Villars, 1885 (52 pages).	
116.	Sur le mouvement d'un corps grave de révolution, suspendu par un point de son axe	1885
	Comptes rendus, t. C, p. 1065 (3 pages).	
117.	Sur la convergence d'une fraction continue algébrique. .	1885
	Comptes rendus, t. C, p. 1451 (3 pages).	
118.	Notice sur les Œuvres de M. Bouquet (Jean-Claude), membre de l'Académie des Sciences	1886
	Comptes rendus, t. CII, p. 1267 (6 pages).	
119.	Discours prononcé aux obsèques de M. Edmond Laguerre, au nom de l'École Polytechnique	1886
	Comptes rendus, t. CIII, p. 425 (1 page).	

1889

120. Rapport sur les Mémoires présentées pour le Grand Pr
des sciences mathématiques en 1886. . . . .

Comptes rendus, t. CIII, p. 1302 (3 pages).

121. Sur la convergence d'une fraction continue algébrique.

Comptes rendus, t. CVI, p. 1326 (4 pages).

122. Extrait d'une Lettre adressée à M. Rouché . . . . .

Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. VII, p. 204 (1 pag

Palerme, 9 juin 1889.

G.-I

OSSERVAZIONI SUI PUNTI SINGOLARI ESSENZIALI;

Nota di **Giulio Vivanti**, in Mantova.

Adunanza del 14 luglio 1889.

Lo studio del modo di comportarsi d'una funzione uniforme nell'intorno d'un suo punto singolare essenziale è quasi completamente da farsi (*). Come un piccolo contributo a tale studio presento le seguenti osservazioni.

I.

Sia $f(z)$ una funzione uniforme avente le seguenti proprietà:

a) Essa ha una singolarità essenziale nell'origine delle coordinate;

b) Nell'intorno dell'origine non ha alcun polo o punto singolare a destra dell'asse delle quantità imaginarie;

c) È reale per valori reali positivi di z, e tende a zero quando z tende verso l'origine seguendo la parte positiva dell'asse delle quantità reali (**).

(*) Non saprei citare a questo proposito se non l'ultimo paragrafo della Memoria di Weierstrass sulle funzioni analitiche uniformi, ed una Nota di Picard nei *Comptes-Rendus*, t. LXXXIX, p. 745. Dei molti lavori, che non è qui il luogo di rammentare, concernenti la teoria dei punti singolari essenziali, nessun altro, per quanto io so, si occupa dell'argomento dal punto di vista che qui si considera.

(**) Tale sarebbe p. es. la funzione $e^{-\frac{1}{z}}$.

Per l'origine O si conduca una retta t facente colla parte posit. dell'asse reale un angolo di valore assoluto $< 45^\circ$, angolo la cui tangente si indicherà con λ. Se P è un punto dell'asse x, Q il punto d'intersezione della retta t colla parallela all'asse y condotta per P, posto $OP = x$, sarà $PQ = \lambda x$; ed essendo $|\lambda| < 1$, Q starà entro il cerchio C avente per centro P e per raggio PO. E poichè C è il cerchio di convergenza dell'elemento della funzione analitica $f(z)$ corrispondente al punto P, il valore della funzione nel punto Q sarà dato dalla serie assolutamente convergente:

$$f(x + i\lambda x) = f(x) + i\lambda x f'(x) + \frac{(i\lambda)^2 x^2}{2!} f''(x) + \dots \quad (1)$$

Ora dai principî della teoria delle funzioni d'una variabile reale risulta facilmente che, se $f(x)$ è una funzione finita e continua in un intorno a destra dell'origine ed avente in tutti i punti di quest'intorno, esclusa tutt'al più l'origine, le derivate di tutti gli ordini, si ha:

$$\lim_{x=0} [x f'(x)] = 0, \qquad \lim_{x=0} [x^2 f''(x)] = 0, \dots$$

Di qui segue anzitutto, che la serie (1), la quale è convergente assolutamente, sarà convergente in egual grado per qualunque valore positivo di x minore di OP; e quindi (*), che il limite della somma della serie per $\lim x = 0$ sarà eguale alla somma dei limiti dei suoi termini. Ma questi limiti sono tutti eguali a zero; quindi:

$$\lim_{x=0} f(x + i\lambda x) = 0.$$

Cioè la funzione tende a zero quando la variabile va ad O seguendo il raggio t.

Sia ora t un raggio, la cui inclinazione sulla parte positiva dell'asse reale abbia valore assoluto $\geqq 45^\circ$ e $< 90^\circ$; e sia ancora λ la tangente dell'angolo tx. Il punto d'intersezione della retta t colla cir-

(*) Dini, *Fondamenti* etc. § 94. — Per essere più esatti, bisognerebbe scindere la serie (1) in due altre, di cui l'una a termini reali, l'altra a termini puramente imaginari, ed applicare le nostre considerazioni successivamente alle due serie.

conferenza C avrà le coordinàte $\frac{2x}{1+\lambda^2}$, $\frac{2\lambda x}{1+\lambda^2}$; quindi, se ε denota una quantità positiva arbitrariamente piccola, il punto Q, di coordinate

$$x_1 = \frac{2x(1-\varepsilon)}{1+\lambda^2} \qquad y_1 = \frac{2\lambda x(1-\varepsilon)}{1+\lambda^2},$$

starà sulla retta t ed entro il cerchio C, e il valore della funzione in quel punto sarà:

$$f(x_1 + iy_1) = f[x + (x_1 - x + iy_1)] = f(x + \mu x)$$

$$= f(x) + \mu x f'(x) + \frac{\mu^2}{2!} x^2 f''(x) + \dots$$

essendo $\mu = \frac{1 + i\lambda - 2\varepsilon}{1 - i\lambda}$. Se consideriamo la serie:

$$f(x) + |\mu||xf'(x)| + \frac{|\mu|}{2} |x^2 f''(x)| + \dots$$

è chiaro che potremo ripetere per essa tutto quanto dicemmo per la serie (1); onde si può concludere che $f(z)$ tende a zero quando la variabile va all'origine seguendo qualunque raggio posto a destra dell'asse imaginario.

È da notarsi che, quando la variabile segue un raggio diverso dall'asse x, il modulo della funzione tenderà bensì a zero, ma il suo argomento potrà non avere alcun limite determinato oppure crescere all'infinito in senso positivo o negativo.

II.

Suolsi dire comunemente, che una funzione uniforme prende in un punto singolare essenziale valori differenti a seconda delle diverse direzioni in cui la variabile va a quel punto. In certi casi però il valore a cui tende la funzione mentre la variabile va ad un punto sin-

golare essenziale lungo una certa linea non dipende soltanto dalla direzione, ma anche dalla curvatura della linea in quel punto.

Sia $f(z)$ una funzione uniforme avente un punto singolare essenziale nell'origine delle coordinate; e posto:

$$f(z) = R(x, y) . e^{i\Theta(x,y)},$$

il modulo $R(x, y)$ soddisfaccia alle seguenti condizioni:

a) Esso ha la forma:

$$R(x, y) = F\left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\right),$$

dove F è simbolo di funzione uniforme, e $P(x, y)$, $Q(x, y)$ sono due funzioni delle 2 variabili reali x, y, olomorfe nell'intorno dell'origine, le quali s'annullano per $x = 0$, $y = 0$;

b) Le $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dP}{dy}$, $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{dQ}{dy}$ non sono tutte nulle per $x = 0$, $y = 0$, e, se 2 almeno di esse non sono nulle, ha luogo per $x = 0$, $y = 0$ la relazione:

$$\frac{dP}{dx}\,\frac{dQ}{dy} = \frac{dP}{dy}\,\frac{dQ}{dx}.$$

Le curve rappresentate dall'equazione:

$$Q(x, y) - CP(x, y) = 0, \qquad (2)$$

dove C è un parametro variabile, passeranno per l'origine e avranno in questo punto una medesima tangente t, la cui inclinazione α sull'asse delle x sarà data da:

$$\operatorname{tang}\alpha = -\left\{\frac{\frac{dQ}{dx} - C\frac{dP}{dx}}{\frac{dQ}{dy} - C\frac{dP}{dy}}\right\}_{\substack{x=0\\y=0}},$$

quantità che per l'ipotesi b) è indipendente da C, e il cui valore è dato dalle due espressioni:

$$-\left\{\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}\right\}_{\substack{x=0\\y=0}}, \quad -\left\{\frac{\frac{dQ}{dx}}{\frac{dQ}{dy}}\right\}_{\substack{x=0\\y=0}},$$

o da quella tra esse avente un significato determinato.—Posto $F\left(\frac{1}{C}\right)=\Gamma$, è chiaro che, se la variabile va all'origine seguendo la linea L della famiglia (2) che corrisponde ad un certo valore C del parametro, il modulo della funzione $f(z)$ avrà costantemente il valore Γ; ed inversamente, dato Γ ad arbitrio, vi sarà sempre una linea L della famiglia (2) sulla quale $f(z)$ avrà modulo costante ed eguale a Γ. Su questa linea l'argomento $\Theta(x, y)$ sarà variabile e potrà esprimersi come funzione $\Omega(x)$ della sola x eliminando y mediante la (2); e, se $\Omega(x)$ al tendere a zero di x tende verso un limite determinato e finito ω, $f(z)$ quando la variabile va alla origine lungo la L tenderà verso il valore determinato $\Gamma\, e^{i\omega}$, mentre nel caso contrario $f(z)$ tenderà verso qualunque valore di modulo Γ.

Prendiamo per esempio la funzione

$$f(z)=e^{\frac{k}{z}};$$

posto $k=a+ib$, si ha:

$$R(x, y)=e^{\frac{ax+by}{x^2+y^2}}, \qquad \Theta(x, y)=\frac{bx-ay}{x^2+y^2},$$

quindi:

$$F(v)=e^v, \quad P(x, y)=ax+by, \quad Q(x, y)=x^2+y^2,$$

donde segue:

$$\frac{dP}{dx}=a, \quad \frac{dP}{dy}=b, \quad \frac{dQ}{dx}=2x, \quad \frac{dQ}{dy}=2y,$$

$$\operatorname{tang}\alpha=-\frac{a}{b}.$$

L'equazione (2) diviene:

$$x^2 + y^2 - C(ax + by) = 0, \tag{3}$$

essa rappresenta una famiglia di cerchi passanti per l'origine O ed aventi i centri sulla retta τ normale alla t. Dalla (3) segue:

$$y = \frac{Cb}{2} - \sqrt{\frac{C^2b^2}{4} + Cax - x^2} = \frac{Cb}{2}\left\{1 - \sqrt{1 + \frac{4a}{Cb^2}x - \frac{4x^2}{C^2b^2}}\right\},$$

e per valori abbastanza piccoli di x:

$$y = \frac{Cb}{2}\left\{1 - 1 - \frac{2a}{Cb^2}x + \frac{2(a^2+b^2)}{C^2b^4}x^2 - \ldots\right\} = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2+b^2}{Cb^3}x^2 - \ldots,$$

quindi nei punti della linea L il modulo di $f(z)$ è costantemente $\Gamma = e^{\frac{1}{C}}$ ed il suo argomento è:

$$\Theta(x, y) = \frac{bx - ay}{x^2 + y^2} = \frac{bx - ay}{C(ax + by)} = \frac{\frac{a^2+b^2}{b}x - \frac{a(a^2+b^2)}{Cb^3}x^2 + \ldots}{x\left\{\frac{a^2+b^2}{b^2}x - \ldots\right\}},$$

sicchè per $x = 0$, $y = 0$ si ha $\Theta(x, y) = \infty$. Adunque, quando la variabile va ad O lungo la linea L, $f(z)$ tende verso tutti i valori di modulo Γ.

Questo fatto dà ragione di un'apparente discontinuità che si verifica nei limiti dei valori della funzione lungo le rette che vanno al punto singolare essenziale. Consideriamo tutti i raggi che partono dall'origine, e supponiamo per brevità di linguaggio $k = -1$. Ad ogni raggio assegniamo come *corrispondente* nel piano della funzione $u = f(z)$ il punto o il gruppo di punti che rappresenta il valore o il gruppo di valori verso cui tende la funzione quando la variabile va all'origine lungo quel raggio. Allora a qualunque raggio posto a destra dell'asse y corrisponderà (§ I) il punto $u = 0$, a qualunque raggio posto a sinistra dell'asse y il punto $u = \infty$; ai due raggi costituiti dalle due

metà dell'asse y la circonferenza di raggio 1 col centro nell'origine. Quanto a tutti gli altri punti del piano u, non esistono raggi che ad esso corrispondano. Orbene, imaginiamo di *interpolare* fra i raggi posti a destra dell'asse y e l'asse y stesso l'insieme continuo M di circonferenze:

$$x^2 + y^2 + Cx = 0 \tag{4}$$

dove C percorre l'intervallo $0 \dots -\infty$ (gli estremi esclusi), e fra i raggi posti a sinistra dell'asse y e l'asse y stesso l'insieme continuo N di circonferenze rappresentato ancora dalla (4), dove C percorre l'intervallo $+\infty \dots 0$ (gli estremi esclusi). All'insieme M corrisponderà nel piano u un insieme continuo H di circonferenze col centro nell'origine, il cui raggio percorrerà l'intervallo $0 \dots 1$ (gli estremi esclusi), ed all'insieme N un insieme continuo K di circonferenze col centro nell'origine, il cui raggio percorrerà l'intervallo $1 \dots \infty$ (gli estremi esclusi). Le circonferenze H e K insieme ai punti 0, ∞ ed alla circonferenza di raggio 1 ricoprono completamente il piano u.

Mantova, 3 luglio 1889.

G. VIVANTI.

ESTRATTI DAI VERBALI.

[*Vedi*: tomo I, p. 1-28, 45-88, 119-156, 379-390; tomo II, p. 77-96, 152, 184-188].

Per le pubblicazioni periodiche e non periodiche ricevute in dono o in cambio dei Rendiconti e presentate nelle varie Adunanze, veggasi la Seconda Parte: *Biblioteca Matematica*.

ADUNANZA DELL' 11 NOVEMBRE 1888 (Presidenza G. Albeggiani).

Corrispondenza. I signori Bordiga, Certo e Previtera ringraziano per la loro nomina a soci del Circolo. — La Direzione del *Journal für die reine und angewandte Mathematik* aderisce al cambio coi *Rendiconti* del Circolo.—Il prof. E. Lebon annunzia l'invio regolare del *Bulletin Scientifique*, da lui diretto, a partire dal 20 ottobre 1888.

Fra le pubblicazioni non periodiche giunte in dono, il Socio Guccia segnala il *Trattato di Aritmetica razionale per la 4ª e 5ª classe del Ginnasio* (Palermo, 1888) del Socio G. Taschetti, professore nel R. Ginnasio Umberto I° di Palermo. Questa operetta di 267 pagine, destinata agli studenti di quarta e quinta classe ginnasiale, merita di essere raccomandata, e per la chiarezza di esposizione e per l'ordine seguito dall'Autore nella distribuzione della materia e nella trattazione dei singoli argomenti. Ciascuno dei quattro libri che compongono questo pregevole trattatino (I. Le operazioni sui numeri interi — II. Le proprietà elementari dei numeri interi — III. Le frazioni — IV. I numeri decimali e la valutazione approssimata delle grandezze e dei numeri) è corredato da una buona raccolta di esercizi.

Memorie e Comunicazioni.

POINCARÉ: *Sur une propriété des fonctions analytiques* (Extrait d'une Lettre adressée à M. Guccia).

GUCCIA: *Teorema sulle funzioni algebriche di due variabili indipendenti.*

GUCCIA: *Nuove espressioni della classe e del numero dei flessi di una curva algebrica piana con singolarità qualunque.*

ADUNANZA DEL 25 NOVEMBRE 1888 (Presidenza G. Albeggiani).

Corrispondenza. Aderiscono al cambio coi *Rendiconti* del Circolo: Il Direttore del R. Osservatorio astronomico di Palermo per le *Pubblicazioni del R. Osservatorio di Palermo* e pel *Bulletino Meteorologico* e l'editore B. Pellerano, di Napoli, pel *Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane.*

Memorie e Comunicazioni.

BERTINI: *Sulle curve fondamentali dei sistemi lineari di curve piane algebriche.*

ADUNANZA DEL 9 DICEMBRE 1888 (Presidenza G. Albeggiani).

Corrispondenza. Il dott. Enrico Amaturo ringrazia per la sua nomina a socio non residente del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

PINCHERLE: *Una trasformazione di serie.*

ADUNANZA DEL 23 DICEMBRE 1888 (Presidenza G. Albeggiani).

Corrispondenza. Il Socio Platania dovendo assentarsi da Palermo si dimette dalla carica di Bibliotecario. Il Circolo delibera di accordargli un congedo di due mesi.

Memorie e Comunicazioni.

GERBALDI: *Un teorema sull'Hessiana d'una forma binaria.*

CASTELNUOVO: *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche.*

ADUNANZA DEL 13 GENNAJO 1889 (Presidenza F. Giudice).

Corrispondenza. Il PRESIDENTE participa alla Società che il sig. ing. Gustavo Ciollaro, con lettera del 26 dicembre 1888, si è dimesso da Socio non residente del Circolo.

Ammissione di nuovi soci. Dietro votazioni a schede segrete, il prof. Dino Padelletti (Napoli), proposto dall'Ufficio di Presidenza, ed il dott. Guido Castelnuovo (Torino), proposto dai soci D'Ovidio e Segre, riescono eletti *Soci non residenti.*

Memorie e Comunicazioni.

BERTINI: *Aggiunta alla Memoria: « Sulle curve fondamentali dei sistemi lineari di curve piane algebriche »* comunicata nell'adunanza del 25 novembre 1888.

VIVANTI: *Sulle funzioni analitiche.*

GUCCIA: *Sull'intersezione di tre superficie algebriche in un punto singolare.*

GIUDICE: *Sui numeri poliedrici.*

È noto che: La differenza tra i poliedri dei numeri n ed $n-1$, aventi V vertici, S spigoli ed F facce, con un angoloide g-spigolo comune, è data dalla somma di $V-1+(S-g).(n-2)$ unità con le $F-g$ differenze tra le facce non comuni, che sono $F-g$ poligoni di n, ed i rispettivi perimetri.

Mediante le note relazioni Euleriane tra gli elementi d'uno stesso poliedro si deduce

$$P_{n,\,(t,\,q,\ldots)} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.\,V - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,(t+2q+\ldots) - \frac{n(n-2)(2n+1)}{3}$$

dove $P_{n,\,(t,\,q,\ldots)}$ è il poliedro di V vertici del numero n in cui sono rappresentati i poliedri di V vertici dei numeri minori come poliedri simili con un angoloide comune, sulle facce del quale si trovano t facce triangolari, q quadrangolari, ecc.

ADUNANZA DEL 27 GENNAJO 1889 (Presidenza G. Albeggiani).

Corrispondenza. I signori prof. D. Padelletti e dott. G. Castelnuovo ringraziano per la loro nomina a soci del Circolo.

Ammissione di nuovi soci. Dietro votazione a schede segrete il dott. E. H. Moore (Yale University, New-Haven), proposto dai soci Guccia e Del Pezzo, è eletto *Socio non residente.*

Memorie e Comunicazioni.

GUCCIA : *Sull'intersezione di tre superficie algebriche in un punto singolare.* (Cont.).

Affari interni. Esposizione ed approvazione del Conte consuntivo del 1888 e del bilancio di previsione pel 1889.

ADUNANZA DEL 10 FEBBRAJO 1889 (Presidenza G. Albeggiani).

Corrispondenza. Il PRESIDENTE comunica una lettera ministeriale del 5 febbrajo 1889 con cui S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione, in seguito a parere favorevole della Giunta del Consiglio Superiore, ha concessa al Circolo Matematico di Palermo la somma di lire 700 a titolo d' incoraggiamento alla pubblicazione dei *Rendiconti.*

La Società delibera, all'unanimità, di ringraziare S. E. il Ministro della P. I.

Ammissione di nuovi soci. Dietro votazione a schede segrete, il dott. Pietro Visalli (Reggio Calabria), proposto dai soci Martinetti e Conti, è eletto *Socio non residente.*

ADUNANZA DEL 24 FEBBRAJO 1889 (Presidenza M. L. Albeggiani).

Corrispondenza. Il dott. P. Visalli ringrazia per la sua nomina a Socio del Circolo. — Il socio Platania insiste nelle date dimissioni dalla carica di Bibliotecario. Il Circolo ne prende atto.

Ammissioni di nuovi soci. Dietro votazione a schede segrete il prof. Giulio Pittarelli, proposto dai Soci Guccia e Gerbaldi, è eletto *Socio non residente.*

Memorie e Comunicazioni.

FOURET : *Sur quelques propriétés involutives des courbes algébriques.*

CASORATI : *Su gli asintoti delle linee piane algebriche* (Da una Lettera a G. B. Guccia).

MAISANO : *L'Hessiano della sestica binaria e il discriminante della forma dell'ottavo ordine.*

GERBALDI : *Sull'Hessiana del prodotto di due forme ternarie.*

LEBON : *Solution du problème de Malfatti.*

ADUNANZA DEL 10 MARZO 1889 (Presidenza G. Albeggiani).

Corrispondenza. Il prof. Moore ringrazia per la sua nomina a Socio del Circolo.

Ammissione di nuovi soci. Dietro votazioni a schede segrete il dott. Mario Pieri (Torino), ed il dott. Cesare Burali-Forti (Torino), proposti dai soci Segre e Peano, riescono eletti *Soci non residenti.*

Memorie e Comunicazioni.

BELTRAMI : *Note fisico-matematiche* (Lettera al prof. Ernesto Cesàro).

MANNHEIM : *Étude d'un déplacement particulier d'une figure de forme invariable par des procédés élémentaires et purement géométriques.*

SCHOUTE : *Sur un théorème relatif à l'Hessienne d'une forme binaire* (Extrai d'une Lettre adressée à M. G. B. Guccia).

BERZOLARI : *Un nuovo teorema sulle involuzioni piane.*

ADUNANZA DEL 24 MARZO 1889 (Presidenza F. Giudice).

Corrispondenza. Il dott. Burali-Forti ringrazia per la sua nomina a Socio del Circolo.

Ammissione di nuovi soci. Dietro votazioni a schede segrete l'ing. Francesco Bottino (Palermo), proposto dai soci Conti ed Albeggiani (M. L.) è eletto *Socio residente* ed il prof. Ernesto Lebon (Parigi), proposto dai Soci Guccia e Cerruti, è eletto *Socio non residente.*

Memorie e Comunicazioni.

ALBEGGIANI (M. L.): *Linee geodetiche tracciate sopra talune superficie.*

BRAMBILLA: *I triangoli principali di una curva gobba del 4° ordine con punto doppio.*

ADUNANZA DEL 14 APRILE 1889 (Presidenza M. L. Albeggiani).

Corrispondenza. Il prof. E. Lebon ringrazia per la sua nomina a Socio del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

VISALLI: *La trasformazione quadratica* (2, 2).

ADUNANZA DEL 28 APRILE 1889 (Presidenza G. Albeggiani).

Ammissioni di nuovi soci. Dietro votazione a schede segrete il dott. Elcia Sadun (Roma), proposto dai soci Pittarelli e Gerbaldi, è eletto *Socio non residente.*

Memorie e Comunicazioni.

ZEUTHEN: *Extrait d'une Lettre adressée à M. Guccia.*

ADUNANZA DEL 12 MAGGIO 1889 (Presidenza G. Albeggiani).

Ammissione di nuovi soci. Dietro votazione a schede segrete il dott. Giovanni Frattini (Roma), proposto dai soci Pittarelli e Gerbaldi, è eletto *Socio non residente.*

Memorie e Comunicazioni.

CASTELNUOVO: *Su certi gruppi associati di punti.*

GUCCIA: *Sopra un recente lavoro concernente la riduzione dei sistemi lineari di curve algebriche piane.*

In una Memoria intitolata « *Ricerche sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere qualunque e sulla loro riduzione all'ordine minimo* (Memoria II^a^) », comparsa nell'ultimo fascicolo degli *Annali di Matematica* (serie II^a^, tomo XVI, p. 291-327), il prof. G Jung, dopo di avere enunciato la seguente proposizione (p. 313):

« Non esser lecito concludere che un dato sistema lineare sia di ordine minimo, « dal solo fatto ch'esso è irriducibile per mezzo di *una* trasformazione quadratica; l'or« dine del sistema potendo eventualmente essere abbassato da una successione di tra« sformazioni quadratiche (*) », soggiunge:

(*) Bertini fermò per primo la mia attenzione sulla questione che ho studiato in questo paragrafo (Nota dell'Autore).

« Ed ecco perchè ho creduto di dover considerare nel presente lavoro anche i « sistemi lineari di genere $p = 0$ (§ 3; § 4, VII; § 12, tab. I) e $p = 1$ (§§ 6 e 9); « quantunque, per questi due casi, l'argomento sia già stato elegantemente trattato e, « *dal punto di vista della irriducibilità per mezzo di* UNA T_2, anche esaurito dall'egregio « dott. G. B. Guccia (Rend. Circolo matem., Palermo, l. c.).

Quest'ultima osservazione lascerebbe supporre che io non avessi esaurita la ricerca pei casi $p = 0$ e $p = 1$ in quanto riguarda la irriducibilità per mezzo di una trasformazione di ordine qualsiasi (ovvero per una successione di trasformazioni quadratiche); in altri termini, che in ciascuno dei miei due lavori sulla riduzione dei sistemi lineari (questi *Rendiconti*, t. I, p. 139-156, 169-189) rimanesse ancora da dimostrare che i sistemi d'ordine minimo [*A*], [*B*], [*C*], [*D*] ed [*E*], [*F*], [*G*] da me assegnati rispettivamente per $p = 0$ e $p = 1$ fossero irriducibili, non soltanto per una trasformazione quadratica, ma eziandio per una trasformazione d'ordine superiore.

Se questo è il pensiero del mio egregio amico, mi sia lecito fargli notare che in ordine a ciascuno dei sistemi medesimi *il carattere d' irriducibilità riesce in pari modo evidente sia che trattisi di una trasformazione d'ordine n sia che trattisi di una trasformazione d'ordine* 2. Si hanno infatti:

Per $p = 0$,

[*A*]. Un sistema lineare d'ordine μ, dotato di un punto base ordinario di grado $\mu - 1$ e di un punto base semplice a distanza finita;

[*B*]. Un sistema lineare d'ordine μ, dotato di un punto base ordinario P di grado $\mu - 1$ e di s ($\geqq 0$ e $< \mu$) punti base semplici Q_1, Q_2, ..., Q_s infinitamente vicini a P (in direzioni distinte o coincidenti);

[*C*]. Un sistema lineare di coniche senza punti base;

[*D*]. La rete delle rette del piano.

Per $p = 1$,

[*E*]. Un sistema lineare di curve ellittiche del terz'ordine con

$$\nu\ (= 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7)$$

punti base semplici a distanza finita o infinitamente vicini;

[*F*]. Un sistema lineare di curve ellittiche del quart'ordine con due punti base doppi, a distanza finita o infinitamente vicini;

[*G*]. Un fascio di curve dell'ordine $3m$ con nove punti base di grado m (dovuto al Bertini).

Consideriamo, ad esempio, il sistema [*B*], siccome quello che può apparire il meno semplice di tutti. Assumendo una rete omaloidica d'ordine n che abbia rispettivamente in P ed in Q_i ($i = 1, 2, \ldots s$) punti base di moltiplicità α e β_i, acciocchè il sistema [*B*] possa ridursi dovrebbe aversi

$$\mu n - \alpha(\mu - 1) - \sum_i \beta_i < \mu$$

ovvero, per la nota condizione $\alpha \geqq \sum_i \beta_i$ (da me più volte richiamata),

$$\mu\,(n - \alpha - 1) < 0;$$

il che è assurdo. Ora, non pare all'egregio prof. J u n g che questo ragionamento sia una ben facile estensione di quello che egli avrà sicuramente fatto pel caso $n = 2$, affine di riconoscere che il sistema $[B]$ non era riducibile per una trasformazione quadratica?

ADUNANZA DEL 26 MAGGIO 1889 (Presidenza G. A l b e g g i a n i).

Memorie e Comunicazioni.

GUCCIA: *Ricerche sulle superficie e le curve gobbe algebriche dotate di singolarità qualunque.*

ADUNANZA DEL 9 GIUGNO 1889 (Presidenza G. A l b e g g i a n i).

Ammissione di nuovi soci. Il signor C a m i l l o J o r d a n (Parigi), è eletto, per acclamazione, *Socio non residente* del Circolo.

Congresso internazionale di Bibliografia delle Scienze Matematiche. In seguito ad invito della Presidenza della Commissione d'organizzazione del Congresso internazionale di Bibliografia delle scienze matematiche che sarà tenuto in Parigi, verso la fine del mese di luglio, il Circolo delibera di fare atto di adesione al Congresso e di prender parte ai lavori del Repertorio bibliografico delle Scienze matematiche. Nomina il suo delegato speciale al Congresso in persona del Socio prof. C a m i l l o J o r d a n.

Memorie e Comunicazioni.

GUCCIA: *Brevi cenni su la vita e le opere di G.-H. H a l p h e n, nato a Rouen il 30 ottobre 1844 e morto a Versailles il 21 maggio 1889.*

CAVALLARO: *Le trasformazioni v-ple dello spazio a tre dimensioni.*

ADUNANZA DEL 23 GIUGNO 1889 (Presidenza G. B. G u c c i a).

Il PRESIDENTE annuncia con rammarico alla Società che la sera del 16 corrente cessava di vivere, in Palermo, il Socio residente Comm. **G a e t a n o C a c c i a t o r e**, professore di Astronomia nella R. Università e direttore del R. Osservatorio Astronomico di Palermo, membro della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo e della Reale Società Astronomica di Londra.

Memorie e Comunicazioni.

BELTRAMI: *Sulla funzione potenziale della circonferenza.*

SUI SISTEMI DI CURVE E DI SUPERFICIE;

Nota del prof. **P. del Pezzo**, in Napoli.

Adunanza del 28 luglio 1889.

Nello studio delle singolarità, o dei sistemi di superficie (o curve piane) occorrono spesso i seguenti principi: (*)

1° Una superficie F^n dotata di singolarità qualunque appartiene sempre a sistemi lineari di F^m, con $m \geqq n$, aventi le medesime singolarità.

2° Le superficie di un determinato ordine m aventi le medesime singolarità di F^n costituiscono un sistema lineare.

3° Se l'ordine m è sufficientemente grande quelle singolarità sono svincolate tra loro rispetto alle F^m, nè i punti dello spazio, o di un determinato luogo, sono aggruppati in modo, che le F^m passanti per un punto debbano passare per gli altri del gruppo.

Qui mi propongo di darne una dimostrazione ricavata dalle cognizioni più elementari nella teoria delle singolarità delle curve piane e superficie.

1. Sia

$$f^n(x, y) = f_r + f_{r+1} + \ldots + f_n = 0 \tag{1}$$

(*) Nella mia Nota « *Estensione di un teorema di* Noether (Questi *Rendiconti*, t. II, 1888) tutto il ragionamento è basato su questi principi.

l'equazione di una curva piana dell'ordine n, che passa con r rami pel centro O delle coordinate, indicando al solito con f_i un polinomio omogeneo del grado i in x ed y. Sia O l'origine di diversi *cicli*, uno dei quali d'ordine a di classe α e colla tangente $bx - y = 0$ rappresentato dalle relazioni (*)

$$x = t^a, \qquad y = S(t) = bt^a + ct^{a+\alpha} + \ldots \qquad (2)$$

È noto, che a definire a ed α e gli *esponenti caratteristici* della serie $S(t)$ concorrono solamente i termini della (1) dei gradi più piccoli, p. e. minori di $r + s \leqq n$. Sicchè, se $h > n$, l'equazione

$$f^h(x, y) = f_r + f_{r+1} + \ldots + f_n + f_{n+1} + \ldots + f_h = 0 \quad (3)$$

rappresenta una curva piana dell'ordine h, che in generale ha nell'origine O e nella direzione $bx - y = 0$ il medesimo ciclo (2).

Similmente dicasi per gli altri cicli, che hanno l'origine in O e le direzioni $b'x - y = 0$, $b''x - y = 0$, ecc. e si conchiuderà, che le curve (1) e (3) passano per O in generale con la stessa singolarità, salvo quando per valori speciali delle costanti arbitrarie contenute in (3) questa abbia in O una singolarità *più elevata*.

2. Più brevemente può dirsi: nelle vicinanze di O x ed y sono piccolissime, sicchè ritenendo in (1) i termini infinitesimi di un ordine non superiore ad $r + s \leqq n$, la singolarità di f^n è sufficientemente definita, e quindi la f^h, pel modo come è formata la sua equazione, avrà in generale in O la medesima singolarità di f^n.

3. Pongasi

$$F^h = f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_h = 0,$$

che rappresenta una curva d'ordine h, per la quale il punto O è

(*) Per le definizioni e notazioni qui adottate cfr. Halphen, *Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes*, nella traduzione francese del trattato sulle curve piane del Salmon.

$(n+1)$-plo. S'indichi con $\varphi^{h-n}=0$ l'equazione di una curva d'ordine $h-n$, che non passi per O. La curva composta $f^n\varphi^{h-n}=0$ ha evidentemente in O la medesima singolarità della f^n, e quindi anche pel n° prec. la curva $f^n\varphi^{h-n}-F=0$. Riassumendo:

Se f^n è una data curva piana dotata nei punti $O, O', O'', \ldots$ di singolarità qualunque $\omega, \omega', \omega'' \ldots$; e φ^{m-n} (con m quanto si voglia grande) è una curva arbitraria, che non passi pei punti $O, O', \ldots$; ed F^m è una curva arbitraria che passa con $n-1$ rami per ogni punto $O, O', \ldots$ le curve del sistema

$$\psi^m = f^n\varphi^{m-n} - F^m = 0 \tag{4}$$

hanno in generale nei punti O le medesime singolarità della f^n.

Il sistema (4) è lineare, il numero delle sue dimensioni può rendersi grande quanto si vuole. Inoltre quando in esso si introducano delle curve $\psi^{m_1}, \psi^{m_2}, \ldots$, le quali abbiano ciascuna in un punto $O^{(i)}$ rispettivamente la singolarità $\omega^{(i)}$, senza passare per gli altri punti O, e che prese insieme $(m_1+m_2+\ldots=m)$ costituiscano una ψ^m, le singolarità $\omega^{(i)}$ saranno *svincolate* tra loro rispetto alle ψ^m.

4. Diremo, che due superficie hanno nel punto O o lungo la curva L la medesima singolarità ω, o λ, quando un piano qualunque le taglia secondo due curve, che hanno in O, ovvero in tutti i punti $L\alpha$, le medesime singolarità.

5. *Sia $F^n=0$ una superficie, che abbia lungo le curve $L_1, L_2, \ldots L_s$ singolarità date $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$ e nei punti $P_1, P_2, \ldots P_i$ singolarità date $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_i$. Denotino $\Phi^{m-n}=0$ e $\Phi^m=0$ due superficie arbitrarie, delle quali la prima non passa per le curve L nè pei punti P, per la seconda ogni punto P è $(n+1)$-plo ed ogni curva L è $(n+1)$-pla. Le superficie del sistema*

$$F^m = F^n\Phi^{m-n} + \Phi^m = 0 \tag{5}$$

hanno in generale nei punti P e lungo le curve L le medesime singolarità della F^n.

Ciò deriva immediatamente dai n^i 3 e 4.

6. Si assoggettino ancora le superficie F^m a passare per un certo numero di punti semplici arbitrari di F^n, Q_1, Q_2, ... e per un certo numero di punti arbitrari dello spazio, R_1, R_2, ... ; se ne otterrà un sistema Σ.

Sieno F^{l_1}, F^{l_2}, ... F^{p_1}, F^{p_2}, ... delle superficie, che abbiano rispettivamente lungo la curva L_k e nel punto P_k, le singolarità λ_k e π_k, senza passare pei rimanenti punti P e curve L, nè pei punti Q ed R; e sieno F^{q_1}, F^{q_2}, ... F^{r_1}, F^{r_2}, ... delle superficie passanti rispettivamente pei punti Q_k ed R_k, senza passare pei rimanenti punti Q ed R nè pei punti P e le curve L.

Prendasi

$$m = l_1 + l_2 + \dots + p_1 + p_2 + \dots + q_1 + q_2 + \dots + r_1 + r_2 + \dots,$$

sarà

$$F^m \equiv F^{l_1} F^{l_2} \dots F^{p_1} F^{p_2} \dots F^{q_1} F^{q_2} \dots F^{r_1} F^{r_2} \dots$$

una superficie di Σ. Ne risulta, che il sistema (5) gode delle seguenti proprietà:

1° Le singolarità λ e π sono svincolate tra loro rispetto alle superficie generiche del sistema.

2° Le superficie di (5) passanti per un punto qualunque Q di F^n non dovranno di necessità passare per altri punti di F^n.

3° Le superficie di (5) passanti per un punto qualuuque R dello spazio non dovranno di necessità passare per altri punti.

7. Le superficie del sistema (5) non sono tutte quelle d'ordine m dotate lungo le curve L e nei punti P delle singolarità date λ e π. Dimostreremo, che il sistema Σ' di tutte le superficie di un determinato ordine m, che hanno le dette singolarità, è lineare: poichè Σ' contiene Σ ne risulterà, che esso gode anche delle proprietà qui sopra enumerate.

Sieno F_1^m, F_2^m, ... F_k^m k superficie indipendenti (cioè non ap-

partenenti ad un sistema lineare con meno di $k - 1$ dimensioni) che abbiano in comune delle curve L e dei punti P comunque singolari; dico che tutte le superficie d'ordine m, che passano per la loro comune intersezione, formano un sistema lineare Σ'.

Infatti, le superficie del sistema

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \ldots + \lambda_k F_k = 0 \tag{6}$$

appartengono a Σ', e se non costituiscono tutto Σ', ve ne sarà una F_{k+1} contenuta in Σ' e non in (6). Allora tutte le superficie del sistema

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \ldots + \lambda_k F_k + \lambda_{k+1} F_{k+1} = 0 \tag{7}$$

appartengono a Σ'. E così di seguito. Onde si scorge per assurdo, che Σ' dev'essere lineare.

Napoli, 26 luglio 1889.

P. DEL PEZZO.

SULLE SINGOLÂRITÀ COMPOSTE

DELLE CURVE ALGEBRICHE PIANE;

(Nota Prima)

del dottore **G. B. Guccia**, in Palermo.

Adunanza del 28 luglio 1889.

La presente Comunicazione si riattacca a varî miei lavori sullo stesso argomento pubblicati nel volume CVII (2° semestre 1888) dei *Comptes Rendus* dell'Accademia delle Scienze di Parigi e nel volume V (1° semestre 1889) dei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei.*

I.

1. Richiamerò anzitutto la definizione della singolarità composta. Siano

$$[\varphi_1]=0\,,\ [\varphi_2]=0\,,\ \dots\ [\varphi_s]=0$$

le equazioni irreduttibili di s curve algebriche, i cui primi membri contengano, linearmente, dei parametri arbitrarî. Si supponga che la curva generica $\varphi_i=0$ $(i=1,\ 2,\ \dots\ s)$ passi *in modo qualunque* per un punto P del piano; cioè :

1° che la curva $\varphi_i=0$ sia dotata, nel punto P, di una singolarità *qualunque*, ben determinata, $[\sigma_i]$;

2° che nelle vicinanze del punto P, fra i rami di due curve generiche $\varphi_i = 0$, $\varphi_k = 0$ (i, $k = 1, 2, \ldots s$; $i \neq k$) dotate, rispettivamente, delle singolarità $[\sigma_i]$, $[\sigma_k]$, intervengano, ulteriormente e comunque, dei mutui rapporti di contatto.

Indicando con $\varphi_i^{(l)}$ ($l = 1, 2, \ldots h$; $h \geqq 2$) h polinomî φ_i linearmente indipendenti, scelti ad arbitrio, e con a_l delle costanti arbitrarie, si dirà *singolarità composta* $[\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s]$ quella, ben determinata, che ogni curva irreduttibile

$$\sum_l a_l \varphi_1^{(l)} \varphi_2^{(l)} \ldots \varphi_s^{(l)} = 0$$

possiede nel punto P.

Se, in particolare, l'equazione $[\varphi_i] = 0$ non contiene linearmente nel suo primo membro alcun parametro variabile [il che avviene quando le condizioni lineari assorbite dal punto P per la curva φ_i, d'ordine n_i, sono in numero $\frac{1}{2} n_i(n_i + 3)$], in tal caso, senza recar pregiudizio alla definizione precedente, si può intendere sostituita alla curva φ_i, una curva φ_i', di ordine più elevato, dotata in P della singolarità $[\sigma_i]$ e tale inoltre che nelle vicinanze di questo punto sostituisca identicamente la curva φ_i nel modo come quest'ultima si comporta rispetto a ciascuna delle altre curve generiche $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \ldots \varphi_s$. La curva φ_i' apparterrà allora ad un sistema lineare $[\varphi_i']$ di dimensioni $> h - 2$, nel quale potranno assumersi h curve $\varphi_i'^{(1)}, \varphi_i'^{(2)}, \ldots \varphi_i'^{(h)}$ linearmente indipendenti; e però la curva che individua, in P, la singolarità composta $[\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s]$ sarà in tal caso rappresentata dall'equazione:

$$\sum_l a_l \varphi_1^{(l)} \varphi_2^{(l)} \ldots \varphi_{i-1}^{(l)} \varphi_i'^{(l)} \varphi_{i+1}^{(l)} \ldots \varphi_s^{(l)} = 0.$$

2. Supposto, per $s = 2$, che le curve generiche $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ posseggano, in P, una stessa singolarità $[\sigma]$ ed ulteriori contatti (fissi) dei rami dell'una con quelli dell'altra, la singolarità composta $[\sigma + \sigma]$ che ne risulta, determinata nel punto P dalla curva irreduttibile

$$\sum_l a_l \varphi_1^{(l)} \varphi_2^{(l)} = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots h;\ h \geqq 2)$$

sarà indicata, in seguito, colla notazione $[2\sigma]$. Ove, in particolare, i sistemi $[\varphi_1]$, $[\varphi_2]$ coincidano, s'intenderà che i polinomî $\varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \ldots \varphi_1^{(h)}, \varphi_2^{(1)}, \varphi_2^{(2)}, \ldots \varphi_2^{(h)}$ della precedente equazione, rappresentino, posti

eguali a zero, $2h$ curve, linearmente indipendenti, di uno stesso sistema lineare $[\varphi]$.

In generale sarà indicata con $[s\sigma]$ la singolarità composta che si produce nel punto P quando, nella definizione stabilita nel n° precedente, si suppone che le curve generiche φ_1, φ_2, ... φ_s posseggano tutte, in detto punto, una medesima singolarità $[\sigma]$ e due qualunque di esse ulteriori contatti (fissi) dei rami dell'una con quelli dell'altra. Come caso particolare si può supporre che $\varphi_i^{(l)} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots s$; $l = 1, 2, \ldots h$; $h \geqq 2$) rappresentino sh curve, linearmente indipendenti, di uno stesso sistema lineare $[\varphi]$.

3. Indicando con $I_{i,k}$ il numero delle intersezioni, confuse nel punto P, di due curve generiche $\varphi_i = 0$, $\varphi_k = 0$ (i, $k = 1, 2, \ldots s$) e con E_i ed $E_{(s)}$ gli abbassamenti del genere di una curva algebrica dovuti, rispettivamente, alla singolarità componente $[\sigma_i]$ e alla singolarità composta $[\sigma_{(s)}] \equiv [\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s]$, si ha:

$$E_{(s)} - \sum_i E_i - \sum_{i,k} I_{i,k} = 0. \quad (*) \tag{1}$$

4. Siano, in generale,

$$[f_1] = 0, \ [f_2] = 0, \ \ldots \ [f_s] = 0$$

(*) Veggasi, per $s = 2$: *Sur l'intersection de deux courbes algébriques en un point singulier* (Comptes Rendus, t. CVII, séance du 22 octobre 1888, p. 656-658) e per s qualunque: *Sulla classe e sul numero dei flessi di una curva algebrica dotata di singolarità qualunque* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. V, 1° sem., seduta del 6 gennajo 1889, p. 18-25). Nella *nota* (2) a piè della pagina 657 del primo di questi due lavori e nella *nota* (2) a piè della pagina 20 del secondo, bisogna aggiungere la citazione dell'importante Memoria del Noether: *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen* (Mathematische Annalen, Bd. XXIII, 1884, s. 311-358), di data anteriore a quella del Bertini: *Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, vol. XXI, 1888, p. 326–333, 413-424) da me menzionata, in cui l'illustre geometra tedesco, in base alla sua teoria, precedentemente esposta (Math. Annalen, Bd. IX, 1876), della risoluzione della singolarità superiore in singolarità ordinarie, dimostra, col massimo rigore, il teorema fondamentale di cui ho fatto uso nella mia ricerca, cioè, *che più curve si possono sempre, con una trasformazione Cremoniana, trasformare in altre dotate, unicamente, di punti multipli ordinari e tali, inoltre, che in ogni punto comune a due qualsiasi di esse le tangenti dell'una siano distinte da quelle dell'altra.*

le equazioni irreduttibili di s curve algebriche qualunque, i cui primi membri contengano, linearmente, dei parametri arbitrari. Indicando con:

$D_{i,k}$ il numero delle intersezioni mobili delle curve generiche $f_i=0$, $f_k=0$ $(i, k=1, 2, \ldots s;\ i \neq k)$;

p_i il genere della curva generica $f_i=0$;

p il genere della curva generica (irreduttibile)

$$[\Phi'] \equiv \sum_l a_l f_1^{(l)} f_2^{(l)} \ldots f_s^{(l)} = 0,$$

in cui $f_i^{(l)}$ $(l=1, 2, \ldots h;\ h \geqq 2)$ sono h polinomi f_i linearmente indipendenti ed a_l delle costanti arbitrarie; si ha

$$(2) \qquad p+s-1=\sum_{i,k} D_{i,k}+\sum_i p_i \text{ (*)}.$$

5. Supponiamo, per $s=2$, che i due sistemi $[f_1]=0$ ed $[f_2]=0$ coincidano, ovvero che si abbia un sistema lineare

$$[f]=0,$$

del genere p_f, per il quale: D è il numero delle intersezioni mobili di due qualunque delle sue curve e p_{ff} il genere della curva irreduttibile

$$\sum_{l,m} a_{l,m} f^{(l)} f^{(m)} = 0, \qquad (l, m=1, 2, \ldots;\ l \neq m)$$

dove $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ sono delle curve qualunque del sistema, linearmente indipendenti, ed $a_{12}, a_{13}, a_{23}, \ldots$ delle costanti arbitrarie. Si ha allora, per la formola (2):

$$(3) \qquad D=p_{ff}-2p_f+1 \text{ (**)}.$$

(*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, loco citato, p. 18. Un'altra dimostrazione di questo mio teorema è stata data recentemente dal ch.mo prof. Zeuthen in una Nota: *Extrait d'une Lettre adressée à M. Guccia* (Questi Rendiconti, t. III, adunanza del 28 aprile 1889, p. 171-178).

(**) *Théorème général concernant les courbes algébriques planes* (Comptes Rendus, t. CVII, séance du 3 décembre 1888, p. 903).

Supponiamo che il sistema lineare $[f]$ *sia determinato, unicamente, dalle sue singolarità base*, cioè che la curva generica f non debba soddisfare ad alcun'altra condizione oltre quelle assorbite dai punti base del sistema. Indicando con $\varkappa$ il numero delle curve f linearmente indipendenti (ossia con $\varkappa - 1$ il numero delle dimensioni del sistema $[f]$), se

$$(4) \qquad D > 2p_f - 2,$$

si ha

$$(5) \qquad \varkappa = D - p_f + 2 \text{ (*)}.$$

Ora, dalle (3) e (5) segue

$$(6) \qquad \varkappa = p_{ff} - 3p_f + 3,$$

con la condizione (3) e (4):

$$(7) \qquad p_{ff} > 4p_f - 3.$$

Si ha quindi la seguente proposizione:

TEOREMA I. — *Sia* $[f] = 0$ *un sistema lineare qualunque di curve algebriche, di genere* p_f, *determinato dalla base. Indicando con* p_{ff} *il genere della curva irreduttibile*

$$f^{(r)}f^{(s)} + af^{(t)}f^{(u)} = 0,$$

(*) Posto $k = \varkappa - 1$, il teorema espresso dalla relazione $k = D - p + 1$ fu da me dimostrato, occasionalmente alla riduzione dei sistemi lineari di curve razionali ed ellittiche, nel tomo I di questi *Rendiconti* (cfr. *Generalizzazione di un teorema di Noether*, seduta del 13 giugno 1886, p. 139-156; *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche*, etc., seduta del 13 febbrajo 1887, p. 169-189) prima colla restrizione che il sistema $[f]$ contenesse un sistema lineare di genere zero (p. 156) e poscia colla restrizione che contenesse un sistema lineare di genere uno e dimensioni > 1 (p. 180). Più tardi il prof. Segre, in una Nota *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p* (questi *Rendiconti*, t. I, seduta del 24 aprile 1887, p. 217-221), fece conoscere come lo stesso teorema poteva riguardarsi come una conseguenza di un noto teorema di Brill e Noether (Math. Annalen, Bd. VII, s. 278), per il che potevaglisi attribuire maggiore estensione, quale si conviene alla condizione $D > 2p - 2$.

dove $f^{(r)}, f^{(s)}, f^{(t)}, f^{(u)}$ *sono quattro curve qualunque del sistema (linearmente indipendenti) ed* a *una costante arbitraria; se* $p_{ff} > 4p_f - 3$, *il sistema ammette*

$$p_{ff} - 3(p_f - 1)$$

curve linearmente indipendenti

In questo enunciato rimangono evidentemente esclusi i *fasci* e le *reti* di curve, giacchè per questi due sistemi lineari, non essendo possibile di costruire la curva irreduttibile $f^{(r)}f^{(s)} + af^{(t)}f^{(u)} = 0$, il numero p_{ff} perde il suo significato.

Per $p_f = 0$ e $p_f = 1$ la condizione (4), e conseguentemente la condizione (7), è sempre soddisfatta. E però, in particolare:

Qualunque sistema lineare $[f]$ *di curve razionali, di dimensioni* > 2, *determinato dalla base, ammette* $p_{ff} + 3$ *curve linearmente indipendenti.*

Qualunque sistema lineare $[f]$ *di curve ellittiche, di dimensioni* > 2, *determinato dalla base, ammette* p_{ff} *curve linearmente indipendenti.*

6. Riferiamoci ai sistemi lineari

$$[f_1] = 0, \ [f_2] = 0, \ \ldots \ [f_s] = 0$$

considerati nel n° 4. Oltre ai numeri ivi definiti, siano:

$D_{i,i}$ il numero delle intersezioni mobili di due curve qualunque del sistema $[f_i] = 0$ $(i = 1, 2, \ldots s)$;

Δ il numero delle intersezioni mobili di due curve qualunque del sistema

$$[\Phi'] \equiv \sum_l a_l f_1^{(l)} f_2^{(l)} \ldots f_s^{(l)} = 0 \, ; \quad (l = 1, 2, \ldots h; \ h > 2)$$

π il genere della curva irreduttibile

$$\sum_{t,u} b_{t,u} \Phi'^{(t)} \Phi'^{(u)} = 0 \, , \quad (t, u = 1, 2, \ldots; \ t \neq u)$$

dove $\Phi'_1, \Phi'_2, \Phi'_3, \ldots$ sono delle curve qualunque del sistema $[\Phi']$ (linearmente indipendenti) e $b_{1,2}, b_{1,3}, b_{2,3}, \ldots$ delle costanti arbitrarie, ovvero (ciò che è lo stesso) il genere della curva irreduttibile

$$\sum_v c_v f_1^{(v)} f_1'^{(v)} f_2^{(v)} f_2'^{(v)} \ldots f_s^{(v)} f_s'^{(v)} = 0 \, ,$$

dove $f_i^{(v)}$, $f_i'^{(v)}$ ($v = 1, 2, \ldots h$; $h > 2$) sono $2h$ polinomi f_i, linearmente indipendenti, e c_v delle costanti arbitrarie.

Applicando la formola (2) si ha allora:

$$\pi = \Delta + 2p - 1,$$

$$\pi = \sum_i D_{i,i} + 4\sum_{i,k} D_{i,k} + 2\sum_i p_i - 2s + 1,$$

$$p = \sum_{i,k} D_{i,k} + \sum_i p_i - s + 1;$$

da cui ricavasi:

(8) $$\Delta = \sum_i D_{i,i} + 2\sum_{i,k} D_{i,k}.$$

7. Supponiamo che il sistema $[f_i] = 0$ ($i = 1, 2, \ldots s$) sia *determinato dalla propria base*; per modo che, indicando con $\varkappa_i$ il numero delle curve f_i linearmente indipendenti, se

(9) $$D_{i,i} > 2p_i - 2,$$

si abbia (5):

(10) $$\varkappa_i = D_{i,i} - p_i + 2.$$

In un punto P_r del piano, nel quale le curve generiche $f_1, f_2, \ldots f_s$, degli ordini $n_1, n_2, \ldots n_s$, posseggono, rispettivamente, delle singolarità qualunque $[\sigma_1^r]$, $[\sigma_2^r]$, $\ldots$ $[\sigma_s^r]$ e, due a due, ulteriori contatti (fissi) dei rispettivi rami, la curva generica Φ', del sistema $[\Phi']$ d'ordine $n_{(s)} = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$, sarà dotata (n° 1) di una singolarità composta, ben determinata, $[\sigma_{(s)}^r] \equiv [\sigma_1^r + \sigma_2^r + \ldots + \sigma_s^r]$ (*).

Ciò posto, consideriamo la più generale curva d'ordine $n_{(s)}$ astretta a possedere, in ogni punto P_r ($r = 1, 2, \ldots$), la singolarità composta $[\sigma_{(s)}^r]$. Una curva siffatta, Φ, genererà un sistema lineare $[\Phi]$, nel quale evidentemente è contenuto il sistema $[\Phi']$ dianzi considerato. Sia

(*) In particolare la singolarità $[\sigma_{(s)}^r]$, in un punto P_r, riducesi alla singolarità base $[\sigma_k^r]$ di uno dei sistemi, $[f_k]$, se per P_r non passa alcuna delle altre curve generiche $f_1, f_2, \ldots f_{k-1}, f_{k+1}, \ldots f_s$.

λ il numero delle curve Φ linearmente indipendenti che ammette sistema $[\Phi]$. Se

$$(11) \qquad \Delta > 2p - 2,$$

sarà

$$(12) \qquad \lambda = \Delta - p + 2.$$

Ora dalle formole (2), (8) e (10) si ha

$$p = \sum_{i,k} D_{i,k} + \sum_i p_i - s + 1,$$

$$\Delta = \sum_i D_{i,i} + 2 \sum_{i,k} D_{i,k},$$

$$\sum_i D_{i,i} = \sum_i \varkappa_i + \sum_i p_i - 2s;$$

e però:

$$(13) \qquad \lambda = \sum_i \varkappa_i + \sum_{i,k} D_{i,k} - s + 1.$$

Osserviamo che, in virtù delle formole (2) e (8), la condizione (11) si traduce nella seguente:

$$\sum_i D_{i,i} > 2 \sum_i p_i - 2s,$$

la quale, alla sua volta, è soddisfatta ove per ciascuno dei sistemi $[f_1]$, $[f_2]$, ... $[f_s]$ sussista la condizione (9). Onde, posto $q_i = \varkappa_i - 1$, la formola (13) somministra la seguente proposizione:

Teorema II. — *Siano*

$$[f_1] = 0, \ [f_2] = 0, \ \ldots \ [f_s] = 0$$

le equazioni irreduttibili di s curve algebriche qualunque, degli ordini n_1, n_2, ... n_s, i cui primi membri contengano, linearmente, dei parametri arbitrari. Siano inoltre:

p_i, $D_{i,i}$ e q_i, rispettivamente: il genere, il numero delle intersezioni mobili di due curve qualunque ed il numero delle dimensioni, del sistema lineare $[f_i]$ $(i = 1, 2, \ldots s)$;

$D_{i,k}$ *il numero delle intersezioni mobili delle curve generiche* f_i *ed* f_k *di due sistemi* $[f_i]$ *ed* $[f_k]$ $(i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ s;\ i \neq k)$.

Se il sistema $[f_i]$ *è determinato dalla base e per esso è soddisfatta la condizione*

$$D_{i,i} > 2p_i - 2,$$

allora la curva irreduttibile

$$f'_1 f'_2 \ldots f'_s + \mu f''_1 f''_2 \ldots f''_s = 0$$

(dove f'_i, f''_i *sono due curve qualunque del sistema* $[f_i]$ *e* μ *una costante arbitraria) appartiene ad un sistema lineare d'ordine* $n_1 + n_2 + \ldots + n_s$, *il quale contiene*

$$\sum_i q_i + \sum_{i,k} D_{i,k}$$

parametri variabili.

Supposto, per $s = 2$, che i due sistemi $[f_1]$, $[f_2]$ coincidano, si ha, in particolare, la proposizione:

Dato un sistema lineare qualunque ∞^q $[f] = 0$, *d'ordine* n, *di genere* p, *di dimensioni* $q > 2$, *determinato dalla base e tale che due qualunque delle sue curve s'incontrano in* D *punti mobili. Se* $D > 2p - 2$, *la curva irreduttibile*

$$f^{(r)} f^{(s)} + \mu f^{(t)} f^{(u)} = 0$$

(dove $f^{(r)}$, $f^{(s)}$, $f^{(t)}$, $f^{(u)}$ *sono quattro curve del sistema linearmente indipendenti e* μ *una costante arbitraria) appartiene ad un sistema lineare di curve d'ordine* $2n$ ∞^{2q+D}.

8. Nella formola (13) sostituiamo per $\varkappa_i$ il valore dato dalla (5), cioè

$$\varkappa_i = D_{i,i} - p_i + 2.$$

Si ottiene allora

$$\lambda = \sum_i D_{i,i} + \sum_{i,k} D_{i,k} - \sum_i p_i + s + 1, \quad (i,k = 1, 2, \ldots s;\ i \neq k) \tag{14}$$

ovvero, ponendo $i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ s$ ed $i \gtreqless j$,

$$\lambda = \sum_{i,j} D_{i,j} - \sum_i p_i + s + 1. \tag{15}$$

E però:

TEOREMA III. — *Dati, come nel Teorema II, s sistemi lineari qualunque di curve algebriche*

$$[f_1] = 0, \; [f_2] = 0, \; \ldots \; [f_s] = 0,$$

degli ordini $n_1, n_2, \ldots n_s$, *determinati dalle rispettive basi. Se pel sistema* $[f_i]$ $(i = 1, 2, \ldots s)$ *è soddisfatta la condizione*

$$D_{i,i} > 2p_i - 2,$$

allora la curva irreduttibile

$$f'_1 f'_2 \ldots f'_s + \mu f''_1 f''_2 \ldots f''_s = 0$$

appartiene ad un sistema lineare d'ordine $n_1 + n_2 + \ldots + n_s$, *il quale contiene*

$$\sum_{i,j} D_{i,j} - \sum_i p_i + s \qquad (i, j = 1, 2, \ldots s, \; i \gtreqless j)$$

parametri variabili.

In particolare:

Dato un sistema lineare $[f] = 0$, *d'ordine n, di genere p, di dimensioni* > 2, *determinato dalla base e tale che due qualunque delle sue curve s'incontrano in D punti mobili. Se* $D > 2p - 2$, *la curva irreduttibile*

$$f^{(r)} f^{(s)} + \mu f^{(t)} f^{(u)} = 0$$

appartiene ad un sistema lineare di curve d'ordine $2n$ $\infty^{3D-2(p-1)}$.

II.

9. I teoremi I, II e III suggeriscono importanti applicazioni in ordine a varî problemi relativi alla teoria delle curve algebriche dotate di singolarità qualunque, dei quali mi propongo occuparmi in un altro lavoro. Pel momento mi limiterò a dedurre dagli enunciati precedenti

alcune proposizioni concernenti le singolarità algebriche date comunque in un punto del piano.

A tale oggetto farò anzitutto notare che la condizione

$$D > 2p_f - 2\,,$$

e la sua equivalente

$$p_{ff} > 4p_f - 3,$$

assegnate, rispettivamente, nei teoremi II e III e nel teorema I, rimangono sempre soddisfatte *per n sufficientemente grande*. Basta infatti osservare che, ponendo

$$D = n^2 - \sum_r I_r$$

$$p_f = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum_r E_r$$

$$p_{ff} = \frac{1}{2}(2n-1)(2n-2) - \sum_r E'_r$$

(dove I_r è il numero delle intersezioni di due curve f confuse in un punto base P_r del sistema $[f]$ ed E_r, E'_r sono gli abbassamenti del genere di una curva algebrica dovuti, ordinatamente, alla singolarità che possiede in P_r la curva generica f e alla singolarità che possiede in P_r la curva generica $f^{(r)}f^{(s)} + af^{(t)}f^{(u)} = 0$), le medesime condizioni si traducono nelle seguenti:

$$3n > \sum_r I_r - 2\sum_r E_r \text{ (*)}, \qquad 3n > \sum_r E'_r - 4\sum_r E_r\,,$$

in cui I_r, E_r, E'_r sono *numeri indipendenti da n.*

10. Sia $[\sigma]$ una singolarità algebrica qualunque, data (**) in un punto P del piano. Siano inoltre:

(*) Cfr. questi Rendiconti, t. I, p. 386-387.

(**) Intenderò, come sempre, che una singolarità $[\sigma]$, in un punto P, sia *data* ove siano fissati tutti gli elementi che servono a definirla. Così, ad esempio, dicendo che una cuspide è data in un punto P bisogna intendere che sia anche assegnata la posizione della retta passante per P che funziona da tangente cuspidale. Etc. In gene-

$I_{\sigma\sigma}$ il numero delle intersezioni, confuse nel punto P, di due curve qualsiasi che ivi posseggono la singolarità $[\sigma]$;

E_σ l'abbassamento del genere di una curva algebrica dovuto alla singolarità $[\sigma]$.

In una Nota pubblicata nel 1886 nei *Comptes Rendus* dell'Accademia delle Scienze di Parigi (*) ho dimostrato che il numero C_σ delle condizioni lineari cui equivale, per una curva algebrica qualsiasi, la condizione di possedere, nel punto P, la singolarità data $[\sigma]$ è espresso dalla formola:

(16) $$C_\sigma = I_{\sigma\sigma} - E_\sigma.$$

Mostrerò ora come lo stesso problema sia suscettibile di un'altra soluzione (in molti casi preferibile alla precedente), ove si consideri nel punto P la singolarità composta, ben determinata, $[2\sigma]$, che ivi prende origine in virtù della definizione del n° 2.

Sia $\varkappa$ il numero delle curve f d'ordine n, linearmente indipendenti, astrette, unicamente, a possedere, nel punto P, la singolarità data $[\sigma]$. Indichiamo rispettivamente con p_f e p_{ff} i generi della curva generica f e della curva irreduttibile

$$f^{(r)}f^{(s)} + af^{(t)}f^{(u)} = 0$$

(in cui $f^{(r)}$, $f^{(s)}$, $f^{(t)}$, $f^{(u)}$ sono quattro curve f linearmente indipendenti ed a una costante arbitraria), dotata, nel punto P, della singolarità composta $[2\sigma]$.

Supposto n sufficientemente grande, la condizione $p_{ff} > 4p_f - 3$ è soddisfatta (n° 9) ed ha quindi luogo il teorema I. Cosicchè, rap-

---

rale, potendo una singolarità qualsiasi essere risoluta, per mezzo di una trasformazione Cremoniana, in punti multipli (e semplici) ordinari (Noether, Math. Annalen, Bd. IX, XXIII), si può dire che una singolarità $[\sigma]$ è data ove nel piano trasformato siano fissati tutti i punti multipli (e semplici) ordinari nei quali essa può risolversi. E però, due curve che in un punto P hanno in comune una singolarità ben determinata $[\sigma]$ sono quelle le cui trasformate passano, con pari moltiplicità, pei punti ordinari che sorgono dalla risoluzione di $[\sigma]$.

(*) *Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes* (Tomo CIII, n° 14, p. 594, adunanza del 4 ottobre 1886).

presentando con $E_{2\sigma}$ l'abbassamento del genere di una curva algebrica dovuto alla singolarità $[2\sigma]$, si hanno le seguenti relazioni:

$$\varkappa = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - C_\sigma,$$

$$p_f = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - E_\sigma,$$

$$p_{ff} = \frac{1}{2}(2n-1)(2n-2) - E_{2\sigma},$$

$$\varkappa + 3p_f - p_{ff} = 3;$$

dalle quali ricavasi:

$$C_\sigma = E_{2\sigma} - 3E_\sigma \text{ (*)}. \tag{17}$$

E però:

Teorema IV. — *Il numero delle condizioni lineari cui equivale, per una curva algebrica, la condizione di possedere, in un punto dato, una singolarità data* $[\sigma]$, *è uguale al numero che esprime l'abbassamento del genere di una curva algebrica dovuto alla singolarità composta, ben determinata,* $[2\sigma]$, *che producesi nello stesso punto, diminuito del triplo del numero analogo relativo alla singolarità data* $[\sigma]$ (**).

(*) Questa relazione, che ho voluto far discendere dal teorema I, poteva anche ottenersi eliminando $I_{\sigma\sigma}$ dalla formola (16) insieme alla formola

$$E_{2\sigma} - 2E_\sigma - I_{\sigma\sigma} = 0,$$

la quale è un caso particolare della (1), in cui, per $s = 2$, è supposto che le due singolarità coincidano.

(**) Vi ha un teorema analogo nello spazio: *Il numero* C_σ *delle condizioni lineari cui equivale, per una superficie algebrica, la condizione di possedere, in un punto P dello spazio, una singolarità data* $[\sigma]$, *è uguale a sei volte l'abbassamento del genere di una superficie dovuto alla singolarità data* $[\sigma]$, *diminuito del quadruplo dell'analogo abbassamento relativo alla singolarità composta* $[2\sigma]$, *individuata, in P, dalla superficie*

$$F_a F_b + \mu F_c F_d = 0,$$

ed aumentato dell'analogo abbassamento relativo alla singolarità composta $[3\sigma]$, *individuata, in P, dalla superficie*

$$F_a F_b F_c + \mu F_d F_e F_f = 0;$$

dove $F_a, F_b, \ldots F_f$ *sono superficie dello stesso ordine dotate, in P, della singolarità*

[illegible] P del piano.

[illegible]

[illegible] singolarità [illegible]

[illegible] per una curv[illegible] la singolarità [illegible] relativo alla singolari[illegible]

[illegible]

[illegible] nel punto P, di una curva qualsiasi

[illegible] $= 0$, ($i = 1, 2, \ldots, h$)

---

data [7] e [illegible] indicando con E l'abbassamento [illegible] genere di [illegible] superficie dovuto ad un punto singolare:

$$C_7 = [illegible] E_7 - [illegible] E_{27} - E_{17} .$$

Nel tomo CV (2° semestre [illegible], p. [illegible]41-[illegible]43) dei *Comptes Rendus* ho fatto [illegible]noscere un'altra espressione del numero C_7 per le superficie algebriche, che ho [illegible]vata dal teorema $p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 2$ da me dimostrato nella Nota: « *Sui* [illegible]*stemi lineari di superficie algebriche dotati di singolarità base qualunque* » (tomo [illegible] questi *Rendiconti*, seduta del 27 febbraio 1887, p. 335-349; cfr. altresì p. 386[illegible] dello stesso tomo). In ordine a quest'ultimo teorema il prof. Noether mi ha [illegible] notare come la medesima proprietà resterebbe inclusa nella formola, a lui dovuta, da l'estensione alle superficie del teorema di Riemann e Roch; della quale (pel caso di superficie dotate di singolarità ordinarie) ha accennato sommariament[illegible] dimostrazione nella Nota: « *Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces* [illegible] [illegible]*briques* » (Comptes Rendus, t. CIII, séance du 26 octobre 1886, p. 734-737). I[illegible] lavoro che preparo sulle superficie e le curve gobbe algebriche dotate di singol[illegible] qualunque avrò larga opportunità di ritornare su questo argomento.

dove $\varphi_i^{(l)}$ sono h curve dello stesso ordine, linearmente indipendenti, ognuna delle quali possiede, in P, la singolarità $[\sigma_i]$.

Sia f_i $(i = 1, 2, \ldots s)$ la più generale curva d'ordine n_i astretta, unicamente, a possedere, nel punto P, la singolarità data $[\sigma_i]$; ed analogamente: Φ la più generale curva d'ordine $n_{(s)} = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$ astretta, unicamente, a possedere, nel punto medesimo, la singolarità composta $[\sigma_{(s)}]$. Le curve f_i e Φ descriveranno due sistemi lineari $[f_i]$ e $[\Phi]$, degli ordini n_i ed $n_{(s)}$, determinati dalle proprie basi (risp. le singolarità $[\sigma_i]$ e $[\sigma_{(s)}]$). Siano: $\varkappa_i$ e λ, rispettivamente, il numero delle curve f_i, ed il numero delle curve Φ, linearmente indipendenti; $D_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots s;\ i \neq k)$ il numero delle intersezioni mobili delle curve generiche f_i ed f_k, di due sistemi $[f_i]$ ed $[f_k]$. Si ha allora:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i n_i + 1\right)\left(\sum_i n_i + 2\right) - C_{(s)}$$

$$\sum_i \varkappa_i = \tfrac{1}{2}\sum_i (n_i + 1)(n_i + 2) - \sum_i C_i$$

$$\sum_{i,k} D_{i,k} = \sum_{i,k} n_i n_k - \sum_{i,k} I_{i,k}.$$

D'altra parte, scegliendo n_i convenientemente grande, la condizione $D_{i,i} > 2p_i - 2$ sarà soddisfatta (n° 9) e si avrà, pel teorema II [formola (13)]:

$$\lambda = \sum_i \varkappa_i + \sum_{i,k} D_{i,k} - s + 1.$$

Sostituendo ora in questa espressione i valori precedenti, ricavasi, in virtù dell'identità

$$(a) \qquad \left(\sum_i n_i\right)^2 = \sum_i n_i^2 + 2\sum_{i,k} n_i n_k,$$

l'espressione:

$$(18) \qquad C_{(s)} = \sum_i C_i + \sum_{i,k} I_{i,k}. \quad (i, k = 1, 2, \ldots s;\ i \neq k)$$

Si ha quindi la seguente proposizione:

TEOREMA V. — *Date s singolarità algebriche $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, $\ldots$ $[\sigma_s]$, comunque disposte in un punto del piano, il numero delle condizioni lineari cui equivale, per una curva algebrica, la condizione di possedere, nello stesso*

punto, la singolarità composta, ben determinata, $[\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s]$ *è uguale alla somma dei numeri analoghi relativi alle singolarità componenti* $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, ..., $[\sigma_s]$, *aumentata della somma delle intersezioni a due a due delle medesime singolarità.* (*)

12. Un'altra proposizione sulle singolarità composte ci è immediatamente fornita dal teorema III, che è medesimamente applicabile per n sufficientemente grande. Si hanno le seguenti relazioni:

$$p = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i n_i - 1\right)\left(\sum_i n_i - 2\right) - C_{(s)},$$

$$\sum_i D_{ii} = \sum_i n_i^2 - \sum_i I_{ii},$$

$$\sum_{i,k} D_{ik} = \sum_{i,k} n_i n_k - \sum_{i,k} I_{i,k}$$

$$\sum_i p_i = \tfrac{1}{2}\sum_i (n_i - 1)(n_i - 2) - \sum_i E_i$$

e (12)

$$p = \sum D_{ii} - \sum_{i,k} D_{ik} - \sum p_i + s + 1;$$

dalle quali si ricava, in virtù dell'identità (a),

$$C_{(s)} = \sum_i I_{ii} - \sum_{i,k} I_{ik} - \sum_i E_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots s; i \neq k)$$

ovvero, ponendo $i, j = 1, 2, \ldots s$ ed $i \gtreqless j$,

(18) $$C_{(s)} = \sum_{i,j} I_{ij} - \sum_i E_i.$$

(*) Non volendo fare intervenire nell'enunciato, oltre alle singolarità $[\sigma]$, le curve generiche φ che le individuano, resta evidentemente esclusa in questa proposizione la seconda ipotesi contemplata nella definizione della singolarità composta data nel n° 1, cioè: che nelle vicinanze del punto P, fra i rami delle curve generiche φ_i e φ_k che ivi posseggono risp. le singolarità $[\sigma_i]$ e $[\sigma_k]$ (comunque disposte in detto punto) esistano ulteriormente dei mutui rapporti di contatto. Ma ciò non toglie che la formola (18) sussista medesimamente anche per questo caso, ove s'intenda però *che siano date, non soltanto le singolarità* $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, ..., $[\sigma_s]$ (*comunque disposte nel punto* P), *ma eziandio le curve generiche* φ_1, φ_2, ..., φ_s *che le individuano, due qualunque delle quali offrano, nelle vicinanze del punto P, ulteriori contatti (fissi) dei rami dell'una con quelli dell'altra.* Lo stesso dicasi, fin da ora, in ordine alle formole (19), (20), (21), (22), (23), (24) e (25) stabilite nei numeri seguenti.

E però:

TEOREMA VI. — *Date s singolarità algebriche $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, ... $[\sigma_s]$, comunque disposte in un punto del piano, il numero delle condizioni lineari cui equivale, per una curva algebrica, la condizione di possedere, nello stesso punto, la singolarità composta, ben determinata, $[\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s]$, è uguale alla somma delle intersezioni, due a due, delle singolarità componenti $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, ... $[\sigma_s]$ e di ciascuna di esse con sè stessa, diminuita della somma degli abbassamenti del genere di una curva algebrica dovuti alle medesime singolarità.*

13. Siano dati, in un punto P del piano, due gruppi di singolarità:

$$[\sigma_1],\ [\sigma_2],\ \ldots\ [\sigma_s]; \qquad [\tau_1],\ [\tau_2],\ \ldots\ [\tau_t],$$

i quali determinano, rispettivamente, le singolarità composte:

$$[\sigma_{(s)}] \equiv [\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s], \qquad [\tau_{(t)}] \equiv [\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_t].$$

Queste ultime dànno origine, alla loro volta, alla singolarità composta

$$[\rho] \equiv [\sigma_{(s)} + \tau_{(t)}].$$

Indicando con:

E'_i ed E''_k ($i = 1, 2, \ldots s$; $k = 1, 2, \ldots t$) rispettivamente gli abbassamenti del genere dovuti alle singolarità $[\sigma_i]$ e $[\tau_k]$;

$I'_{i,i'}$ ed $I''_{k,k'}$ ($i, i' = 1, 2, \ldots s$; $k, k' = 1, 2, \ldots t$; $i \gtreqless i'$; $k \gtreqless k'$), rispettivamente, i numeri delle intersezioni di due singolarità $[\sigma_i]$, $[\sigma_{i'}]$ (ovvero di una singolarità $[\sigma_i]$ con sè stessa) e di due singolarità $[\tau_k]$, $[\tau_{k'}]$ (ovvero di una singolarità $[\tau_k]$ con sè stessa);

$I_{i,k}$ ($i = 1, 2, \ldots s$; $k = 1, 2, \ldots t$) il numero delle intersezioni di una singolarità $[\sigma_i]$ con una singolarità $[\tau_k]$;

$I_{(s)(t)}$ il numero delle intersezioni delle singolarità $[\sigma_{(s)}]$ e $[\tau_{(t)}]$;

$C_{(s)}$, $C_{(t)}$ e C i numeri di condizioni lineari cui sono equivalenti, rispettivamente, le singolarità $[\sigma_{(s)}]$, $[\tau_{(t)}]$ e $[\rho]$;

si hanno, in virtù delle formole (18) e (19), le seguenti relazioni:

$$C = C_{(s)} + C_{(t)} + I_{(s)(t)}$$

$$C_{(s)} = \sum_{i,i'} I'_{i,i'} - \sum_i E'_i$$

$$C_{(t)} = \sum_{k,k'} I''_{k,k'} - \sum_k E''_k$$

donde ricavasi:

$$C = \sum_{i,i'} I'_{i,i'} + \sum_{k,k'} I''_{k,k'} - \sum_i E'_i - \sum_k E''_k + I_{(s)(t)}.$$

D'altra parte, essendo

$$[\rho] \equiv [\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_t],$$

si ha, per la stessa formola (19),

$$C = \sum_{i,i'} I'_{i,i'} + \sum_{k,k'} I''_{k,k'} + \sum_{i,k} I_{i,k} - \sum_i E'_i - \sum_k E''_k.$$

Da queste due ultime relazioni si ottiene:

$$I_{(s)(t)} = \sum I_{i,k}. \text{ (*)} \quad (i = 1, 2, \ldots s;\ k = 1, 2, \ldots t) \tag{20}$$

14. Supposto, per $s = t$, che la singolarità $[\tau_k]$ coincida colla singolarità $[\sigma_k]$, o meglio che si abbia un sol gruppo di singolarità:

$$[\sigma_1],\ [\sigma_2],\ \ldots\ [\sigma_s],$$

per il quale voglia conoscersi il numero delle intersezioni con sè stessa della singolarità composta, ad esso relativa,

$$[\sigma_{(s)}] \equiv [\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s],$$

(*) Benchè questa formola, in conseguenza della stabilita definizione della singolarità composta, possa riguardarsi come evidente per sè stessa, purnondimeno non reputo inutile dedurla, come ho fatto, dai risultati precedenti, in vista dell'uso frequente che mi occorrerà di farne nelle applicazioni.

si ha, in particolare, la formola:

$$I_{(s)(s)} = \sum_i I_{i,i} + 2\sum_{i,k} I_{i,k} \quad (i, k = 1, 2, \ldots s;\ i \neq k) \tag{21}$$

15. Si possono finalmente ottenere altre formole (non meno utili delle precedenti nelle applicazioni) supponendo, nei n^i (3), (11), (12) e (14), che le singolarità date $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, ... $[\sigma_s]$ coincidano in una sola, ovvero che si abbia, nel punto P, una singolarità $[\sigma]$, rispetto alla quale si vuol considerare la singolarità composta, ben determinata, $[s\sigma]$, che ivi prende origine a norma della definizione stabilita nel n° 2. Indicando a tal uopo con C_σ, $I_{\sigma\sigma}$ ed E_σ i numeri: delle condizioni lineari, delle intersezioni con sè stessa e dell'abbassamento del genere, relativi alla singolarità data $[\sigma]$, e con $C_{s\sigma}$, $I_{s\sigma,s\sigma}$, $E_{s\sigma}$ i numeri analoghi relativi alla singolarità composta $[s\sigma]$, si hanno, in virtù delle formole (1), (18), (19) e (21), le seguenti espressioni:

$$E_{s\sigma} = \tfrac{1}{2} s[2E_\sigma + (s-1)I_{\sigma\sigma}], \tag{22}$$

$$C_{s\sigma} = \tfrac{1}{2} s[2C_\sigma + (s-1)I_{\sigma\sigma}], \tag{23}$$

$$C_{s\sigma} = \tfrac{1}{2} s[(s+1)I_{\sigma\sigma} - 2E_\sigma], \tag{24}$$

$$I_{s\sigma,s\sigma} = s^2 I_{\sigma\sigma}. \tag{25}$$

In una seconda Comunicazione mostrerò, con esempi, di quanta utilità riescano, nello studio dei punti singolari delle curve piane, le formole sopra stabilite (n^i 9-15).

Palermo, luglio 1889.

G. B. GUCCIA.

SULLA INTEGRAZIONE

DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

A DERIVATE PARZIALI

CHE SI PRESENTA NELLA TEORIA DELLE FUNZIONI CONIUGATE;

Nota del prof. **Vito Volterra**, in Pisa.

Adunanza del 10 novembre 1889.

1. In una Nota recentemente pubblicata nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (*), dopo aver considerato dei parametri differenziali i quali hanno rispetto alle funzioni di iperspazii un ufficio analogo a quello dei noti parametri differenziali rispetto alle ordinarie funzioni, ho accennato alla possibilità di integrare un sistema di equazioni differenziali con date condizioni ai limiti, problema che comprende come caso particolare le ordinarie questioni sulla integrazione della equazione differenziale $\Delta^2 = 0$, e che risolve una questione fondamentale relativamente alle funzioni coniugate le più generali (**).

Mi permetto ora di tornare nuovamente sul problema e di svilupparne la soluzione.

(*) *Rend. R. Acc. Lincei*, 5 Maggio 1889.
(**) Ibid., 28 Aprile 1889.

Il sistema di equazioni differenziali è il seguente

$$(1) \qquad \sum_1^{r+1}{}_s(-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

$$(1') \qquad \sum_1^n{}_t \frac{\partial p_{i_1 \dots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0.$$

In queste equazioni $x_1\ x_2 \dots x_n$ sono le variabili indipendenti e le $p_{i_1 \dots i_r}$, ottenute per tutte le combinazioni r ad r degli indici $i_1 \dots i_n \equiv 1, 2 \dots n$ sono le funzioni incognite. Supporremo le p tali che mutino segno per una trasposizione degli indici. Le (1) sono ottenute per tutte le combinazioni degli indici $r+1$ a $r+1$, e le (1′) per le combinazioni $r-1$ a $r-1$.

Nella mia nota *Sulle funzioni coniugate* ho dimostrato che la condizione necessaria e sufficiente affinchè siano soddisfatte le (1), è che si possa porre

$$p_{i_1 \dots i_r} = \sum_1^r{}_t(-1)^t \frac{\partial P_{i_1 \dots i_{t-1} i_{t+1} \dots i_r}}{\partial x_{i_t}},$$

e ho dimostrato pure che le P possono ottenersi dalle p con sole operazioni di quadratura (*). Se quindi si tien conto del teorema 2° della Nota ora citata, avremo che alle (1) e (1′) potranno sostituirsi le equazioni seguenti

$$(2) \quad (-1)^r \Delta^2 P_{i_1 \dots i_{r-1}} + \sum_1^{r-1}{}_t(-1)^t \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \sum_1^n{}_s \frac{\partial P_{i_1 \dots i_{t-1} i_{t+1} \dots i_{r-1} i_s}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

2. Passiamo alle condizioni al contorno che definiscono le $p_{i_1 \dots i_r}$.

Sia il campo S_n una porzione di uno spazio piano ad n dimensioni entro il quale le p e le P sono monodrome finite e continue insieme alle loro derivate, e denotiamo il contorno di S_n con S_{n-1} di cui ν sia la normale diretta verso l'interno di S_n. Pongasi

$$(3) \qquad \sum_1^n{}_t p_{i_1 \dots i_{r-1} i_t} \cos \nu x_{i_t} = a_{i_1 \dots i_{r-1}}$$

$$(3') \qquad \sum_1^{r+1}{}_s(-1)^s p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}} \cos \nu x_{i_s} = b_{i_1 \dots i_{r+1}},$$

(*) *Rend. R. Acc. Lincei*, vol. V, 1° sem. pag. 602.

per un teorema dimostrato nella citata Nota, avremo che entro S_r i p sono determinate quando sono noti al contorno i valori delle a: oppure delle b.

Noi ci proponiamo ora di eseguire la effettiva determinazione delle p quando siano note le a o le b nel caso in cui lo spazio S_r sia un campo sferico.

3. Prima di procedere oltre vediamo come può interpretarsi questa questione nella teoria generale delle funzioni coniugate.

Siano $F[S_{r-1}]$. e $\Phi[S_{n-r-1}]$ due funzioni coniugate. Poniamo

$$\frac{dF}{d(x_{i_1} \dots x_{i_r})} = p_{i_1 \dots i_r},$$

adottando le notazioni della Nota più volte citata (*), avremo

$$\frac{dF}{d(x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}} \nu)} = \frac{a_{i_1 \dots i_{r-1}}}{\sqrt{\sum_r^n \cos^2(\nu x_r)}}$$

$$\frac{dF}{dS_{i_1 \dots i_{r+1}}} = \frac{b_{i_1 \dots i_{r+1}}}{\sqrt{\sum_1^{r+1}{}_s \cos^2(\nu x_{i_s})}}.$$

Quindi il problema che ci proponiamo risolvere consiste nel determinare le due funzioni coniugate F e Φ entro uno spazio sferico, essendo noto al contorno la

$$\frac{dF}{d(x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}} \nu)}, \text{ oppure la } \frac{dF}{dS_{i_1 \dots i_{r+1}}}.$$

4. Cominceremo dal ricercare le condizioni alle quali devono soddisfare le a e le b e questa ricerca la condurremo senza supporre che S_r sia un campo sferico, ma ammettendolo qualunque.

(*) Rend. R. Acc. Lincei, vol. V, 1° sem. pag. 635.

Due condizioni possono ottenersi subito, infatti dovremo evidentemente avere:

$$\text{(I)}\qquad \sum_{1}^{n} {}_t\, a_{i_1,\,,\,,\,i_{r-2}\,i_t} \cos \nu x_{i_t} = 0$$

$$\text{(I')}\qquad \sum_{1}^{r+2} {}_s (-1)^s\, b_{i_1,\,,\,,\,i_{s-1}\,i_{s+1}\,,\,,\,i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s} = 0.$$

Prendiamo poi nella formula (2) della citata Nota (*), la $P'_{i_1 \ldots i_{r-1}} = 1$ e tutte le altre P' uguali a zero. Si otterrà:

$$\int_{S_{n-1}} a_{i_1,\,,\,,\,i_{r-1}}\, dS_{n-1} + \int_{S_n} \sum_{1}^{n} {}_t \frac{\partial p_{i_1 \ldots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}}\, dS_n = 0$$

dovremo dunque avere

$$\text{(II)}\qquad \int_{S_{n-1}} a_{i_1 \ldots i_{r-1}}\, dS_{n-1} = 0.$$

In modo analogo si troverebbe:

$$\text{(II')}\qquad \int_{S_{n-1}} b_{i_1 \ldots i_{r+1}}\, dS_{n-1} = 0.$$

Prendiamo ora un sistema di coordinate curvilinee $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ per individuare i punti dell'iperspazio S_{n-1} e denotiamo come sempre con ν la normale ad esso.

Poniamo:

$$\xi_1 = u_1,\ \xi_2 = u_2,\ \ldots\ \xi_{n-1} = u_{n-1},\ \xi_n = \nu.$$

Sia

$$\sum_{1}^{n-1} {}_r \sum_{1}^{n-1} {}_s\, E_{rs}\, du_r\, du_s$$

il quadrato dell'elemento lineare di S_{n-1}.

Quello di S_n resulterà dato da

$$\sum_{1}^{n-1} {}_r \sum_{1}^{n-1} {}_s\, E_{rs}\, d\xi_r\, d\xi_s + d\xi_n^2.$$

(*) *Rend. R. Acc. Lincei*, vol. V, 1° sem. pag. 631.

Poniamo, come sopra,

$$p_{i_1 \dots i_r} = \frac{dF}{d(x_{i_1} \dots x_{i_r})} \qquad \varpi_{i_1 \dots i_r} = \frac{dF}{d(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_r})},$$

avremo

$$(4) \qquad p_{i_1 \dots i_r} = \sum_h \varpi_{h_1 \dots h_r} \frac{d(\xi_{h_1} \dots \xi_{h_r})}{d(x_{i_1} \dots x_{i_r})} =$$

$$= \sum_h \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{d(x_{i_{r+1}} \dots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}} \dots \xi_{h_n})} \varpi_{h_1 \dots h_r},$$

essendo

$$D = \left\{\frac{d(x_1 \dots x_n)}{d(\xi_1 \dots \xi_n)}\right\}^2 = \begin{vmatrix} E_{1,1} & \dots & E_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{n-1,1} & \dots & E_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

onde, scegliendo opportunamente in ciascuna formola il segno di $\sqrt{D}$, avremo

$$b_{i_1 \dots i_{r+1}} = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_h \varpi_{h_1 \dots h_r} \sum_1^{r+1}{}_s \frac{d(x_{i_s} x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}} \dots \xi_{h_n})} \cos(\nu x_{i_s}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_h \varpi_{h_1 \dots h_r} \sum_1^{n}{}_s \frac{d(x_{i_s} x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}} \dots \xi_{h_n})} \cos \nu x_{i_s} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_h \varpi_{h_1 \dots h_r} \sum_{r+1}^{n}{}_l (-1)^l \frac{d(x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}} \dots \xi_{h_{l-1}} \xi_{h_{l+1}} \dots \xi_{h_n})} \sum_1^{n}{}_s \frac{\partial x_{i_s}}{\partial \xi_{h_l}} \cos(\nu x_{i_s}).$$

Ora

$$\sum_1^n \frac{\partial x_{i_s}}{\partial \xi_{h_l}} \cos(\nu x_{i_s})$$

è eguale ad 1 se $h_l = n$, altrimenti è nulla. Quindi:

$$b_{i_1 \dots i_{r+1}} = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_h' \varpi_{h_1 \dots h_r} \frac{d(x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(u_{h_{r+1}} \dots u_{h_{n-1}})}$$

ove $\sum_h'$ si intende estesa a tutte le combinazioni degli indici $1, 2 \dots n-1$, r ad r e $h_1 \dots h_{n-1} \equiv 1, 2 \dots n-1$.

Ne segue che

$$\sum_i b_{i_1 \dots i_{r+1}} \frac{d(x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}} \dots u_{k_{n-1}})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_h' \varpi_{h_1 \dots h_r} \sum_i \frac{d(x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(u_{h_{r+1}} \dots u_{h_{n-1}})} \frac{d(x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}} \dots u_{k_{n-1}})}.$$

Ma

$$\sum_i \frac{d(x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(u_{h_{r+1}} \dots u_{h_{n-1}})} \frac{d(x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(u_{h_{n-1}} \dots u_{k_{n-1}})} =$$

$$= \begin{vmatrix} E_{h_{r+1}, k_{r+1}} & \dots & E_{h_{n-1}, k_{r+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{h_{r+1}, k_{n-1}} & \dots & E_{h_{n-1}, k_{n-1}} \end{vmatrix};$$

onde, adoperando una notazione già usata (*), potremo rappresentare la precedente espressione col simbolo

$$D \begin{bmatrix} h_{r+1} & \dots & h_{n-1} \\ k_{r+1} & \dots & k_{n-1} \end{bmatrix},$$

e per conseguenza avremo

$$(5) \quad \sum_i b_{i_1 \dots i_{r+1}} \frac{d(x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}} \dots u_{k_{n-1}})} = \sum_h' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_{r+1} & \dots & h_{n-1} \\ k_{r+1} & \dots & k_{n-1} \end{bmatrix} \varpi_{h_1 \dots h_r}.$$

Da questa relazione si deduce

$$(6) \quad \varpi_{h_1 \dots h_r} = \sum_k' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_r \\ k_1 & \dots & k_r \end{bmatrix} \sum_i b_{i_1 \dots i_{r+1}} \frac{d(x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}} \dots u_{k_{n-1}})}$$

onde vediamo che le b debbono soddisfare ancora alle condizioni

(*) *Rend. R. Acc. Lincei*, vol. V, 1° sem., pag. 637.

$$\text{(III)} \quad \sum_{1}^{r+1}{}_s(-1)^s \frac{\partial}{\partial u_{h_s}} \left\{ \sum_k' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 \dots h_{s-1} h_{s+1} \dots h_{r+1} \\ k_1 \dots k_r \end{bmatrix} \sum_i b_{i_1 \dots i_{r+1}} \frac{d(x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}} \dots u_{k_{n-1}})} \right\} = 0.$$

Queste equazioni sono tante quante sono le combinazioni degli indici $1, 2 \dots n-1$, $r+1$ a $r+1$.

Osserviamo ora che, posto

$$\sum_1^{n-1}{}_r \sum_1^{n-1}{}_s E_{rs}\, d\xi_r\, d\xi_s + d\xi_n^2 = \sum_1^{n}{}_r \sum_1^{n}{}_s E_{rs}\, d\xi_r\, d\xi_s\,,$$

avremo

$$E_{sn} = E_{ns} = 0 \ (s \gtrless n)\,, \quad E_{n,n} = 1\,,$$

onde

$$\begin{bmatrix} h_{r+1} \dots h_n \\ k_{r+1} \dots k_n \end{bmatrix} = 0$$

se uno degli h (o k) è uguale ad n, mentre tutti gli indici k (o h) sono diversi da n, e

$$\begin{bmatrix} h_{r+1}\,, \dots h_{n-1}\,, n \\ k_{r+1}\,, \dots k_{n-1}\,, n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{r+1} \dots h_{n-1} \\ k_{r+1} \dots k_{n-1} \end{bmatrix}$$

se tutti gli indici h e k sono diversi da n.

Consideriamo le espressioni che nella citata Nota (*) ho indicato con $\theta_{k_r \dots k_n}$, cioè

$$\sum_r^n{}_s(-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi_{k_s}} \left\{ \sum_h \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_{r+1} \dots h_n \\ k_r \dots k_{s-1} k_{s+1} \dots k_n \end{bmatrix} \varpi_{h_1 \dots h_r} \right\}.$$

Nel nostro caso avremo

$$(7) \qquad \theta_{k_r \dots k_{n-1}, n} =$$

$$= \sum_r^{n-1}{}_s(-1)^s \frac{\partial}{\partial u_{k_s}} \left\{ \sum_h' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_{r+1} \dots h_{n-1} \\ k_r \dots k_{s-1} k_{s+1} \dots k_{n-1} \end{bmatrix} \varpi_{h_1 \dots h_r} \right\} +$$

(*) *Rend. R. Acc. Lincei*, vol. V, 1° sem., pag. 638.

$$(-1)^r \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \sum\nolimits_h'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_r \dots h_{n-1} \\ k_r \dots k_{n-1} \end{bmatrix} \varpi_{h_1 \dots h_{r-1}, n} \right\}, \quad (k_r \dots k_{n-1} \gtrless n)$$

(8) $$\theta_{k_r \dots k_n} =$$

$$= \sum_r^n {}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial u_{k_s}} \left\{ \sum\nolimits_h'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_r \dots h_{n-1} \\ k_r \dots k_{s-1} k_{s+1} \dots k_n \end{bmatrix} \varpi_{h_1 \dots h_{r-1}, n} \right\}, (k_r, \dots k_n \gtrless n)$$

in cui $\sum_h''$ è una somma estesa a tutte le combinazioni degli indici $1, 2 \dots n-1$, $r-1$ a $r-1$, e $(h_1 \dots h_{n-1}) \equiv (1, 2 \dots n-1)$.

Le a sono date da

$$a_{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_1^n {}_l p_{i_1 \dots i_{r-1} i_l} \cos(\nu x_{i_l}) =$$

$$= \sum_r^n {}_l (-1)^{l-r} \sum\nolimits_h \varpi_{h_1 \dots h_r} \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{d(x_{i_l} \dots x_{i_{l-1}} x_{i_{l+1}} \dots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}} \dots \xi_{h_n})} \cos \nu x_{i_l} =$$

$$= \sum\nolimits_h'' \varpi_{h_1 \dots h_{r-1}, n} \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{d(x_{i_r} \dots x_{i_n})}{d(\xi_{h_r} \dots \xi_{h_{n-1}} \xi_n)},$$

quindi

$$\sum\nolimits_i a_{i_1 \dots i_{r-1}} \frac{d(x_{i_r} \dots x_{i_n})}{d(\xi_{k_r} \dots \xi_{k_{n-1}} \xi_n)} = \sum\nolimits_h'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_r \dots h_{n-1} \\ k_r \dots k_{n-1} \end{bmatrix} \varpi_{h_1 \dots h_{r-1} n}.$$

Se sono soddisfatte le (1) e (1') deve aversi (*)

$$\theta_{k_r \dots k_n} = 0.$$

Dalla (8) si deducono dunque le seguenti condizioni per le a,

(IV) $$\sum\nolimits_i \sum_r^n {}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial u_{k_s}} \left(\sum_1^r {}_l (-1)^l a_{i_1 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_r} \cos(\nu x_{i_l}) \right) \times$$

$$\times \frac{d(x_{i_{r+1}} \dots x_{i_n})}{d(u_{k_r} \dots u_{k_{s-1}} u_{k_{s+1}} \dots u_{k_n})} = 0.$$

(*) Ibid.

5. Ciò premesso passiamo alla risoluzione della questione propostaci. In primo luogo si potrà osservare che i due problemi di determinare le p quando si conoscono le a, oppure le b, rientrano l'uno nell'altro.

Ponendo infatti

$$p_{i_1 \dots i_r} = q_{i_{r+1} \dots i_n},$$

resulta

$$a_{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_1^n{}_t\, p_{i_1 \dots i_{r-1} i_t} \cos(\nu x_{i_t}) = \sum_r^n{}_t (-1)^{t-r} q_{i_r \dots i_{t-1} i_{t+1} \dots i_n} \cos(\nu x_{i_t})$$

$$b_{i_1 \dots i_{r+1}} = \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}} \cos \nu x_{i_s} = (-1)^n \sum_1^n q_{i_{r+2} \dots i_n i_s} \cos \nu x_{i_s}$$

e le q soddisfano alle equazioni differenziali

$$\sum_r^n (-1)^{t-r} \frac{d q_{i_r \dots i_{t-1} i_{t+1} \dots i_n}}{\partial x_{i_t}} = 0$$

$$\sum_1^n{}_s \frac{\partial q_{i_{r+2} \dots i_n i_s}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

perfettamente analoghe alle (1) e (1').

Ci limiteremo perciò a risolvere la questione ammettendo date le b al contorno.

Prendiamo come unità di lunghezza il raggio del campo sferico S_n limitato dal contorno S_{n-1} e denotiamo con ρ la distanza dei punti di S_n dall'origine, centro dello spazio sferico.

Poniamo

$$B_{i_1 \dots i_{r+1}} = \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}} x_{i_s},$$

avremo

$$\Delta^2 B_{i_1 \dots i_{r+1}}$$
$$= \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s (x_{i_s} \Delta^2 p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}} + p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}} \Delta^2 x_{i_s}) +$$

$$+ \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

Ora al contorno S_{n-1} si ha

$$B_{i_1 \dots i_{r+1}} = - b_{i_1 \dots i_{r+1}},$$

per conseguenza le funzioni B potranno immediatamente determinarsi con sole operazioni di quadratura (*).

Poichè le b debbono soddisfare le condizioni (II'), così avremo che le $\frac{B}{\rho}$ si conserveranno sempre finite, onde potremo porre

$$B_{i_1 \dots i_{r+1}} = - \rho \mathbf{B}_{i_1 \dots i_{r+1}}.$$

I punti del contorno S_{n-1} li supporremo individuati, come precedentemente, per mezzo di un sistema di coordinate curvilinee $u_1, u_2 \dots u_{n-1}$ e supporremo sempre che

$$\sum_1^{n-1}{}_r \sum_1^{n-1}{}_s E_{rs}\, du_r\, du_s$$

sia il quadrato dell'elemento lineare dello spazio S_{n-1}. Ogni punto dello spazio S_n potrà essere proiettato dall'origine sopra S_{n-1} e quindi sarà individuato dalle coordinate $u_1, u_2 \dots u_{n-1}$ della proiezione e dalla sua distanza ρ dall'origine. Se poniamo $x_i = \rho y_i$, avremo che le y_i saranno le coordinate della proiezione.

Conduciamo per un punto qualunque di S_n un iperspazio sferico T_{n-1} concentrico a S_{n-1} di raggio ρ. Esso racchiuderà nel suo interno un certo spazio T_n.

Il quadrato dell'elemento lineare di T_{n-1} sarà

$$\sum_1^{n-1}{}_r \sum_1^{n-1}{}_s \mathbf{E}_{rs}\, du_r\, du_s$$

ove

$$\mathbf{E}_{rs} = \rho^2 E_{rs}.$$

(*) Vedi una Nota del Prof. Tonelli pubblicata nei *Rendiconti della Accademia delle Scienze di Gottinga*, 1875.

La normale a T_{n-1}, diretta verso l'interno di T_n, sarà $-\rho$ e i coseni di direzione della normale stessa resulteranno

$$-\frac{x_1}{\rho}, \quad -\frac{x_2}{\rho}, \dots -\frac{x_n}{\rho}.$$

Noi possiamo considerare T_{n-1} come il contorno dello spazio T_n; quindi le formule trovate nel § 4, potranno applicarsi a T_{n-1} invece che ad S_{n-1}. Basterà osservare che dovremo porre invece delle $b_{i_1 \dots i_{r+1}}$, $-\frac{B_{i_1 \dots i_{r+1}}}{\rho} = \mathbf{B}_{i_1 \dots i_{r+1}}$, prendendo i valori di queste funzioni nei punti di T_{n-1}, e a ν dovremo sostituire $-\rho$. Oltre a ciò in luogo di D dovremo porre

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_{1,1} & \dots & \mathbf{E}_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{E}_{n-1,1} & \dots & \mathbf{E}_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \rho^{2(n-1)} \begin{vmatrix} E_{1,1} & \dots & E_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{n-1,1} & \dots & E_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

cioè dovremo sostituire a D, $\rho^{2(n-1)} D$ e così analogamente invece di

$$\begin{bmatrix} h_1 \dots h_q \\ k_1 \dots k_q \end{bmatrix}$$

dovremo porre

$$\rho^{-2(n-q-1)} \begin{bmatrix} h_1 \dots h_q \\ k_1 \dots k_q \end{bmatrix}.$$

Applichiamo ora le (6). Scegliendo convenientemente il segno di $\sqrt{D}$, otterremo

$$\varpi_{h_1 \dots h_r} = -\rho^r \sum\nolimits_k' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 \dots h_r \\ k_1 \dots k_r \end{bmatrix} \sum\nolimits_i \mathbf{B}_{i_1 \dots i_{r+1}} \frac{d(y_{i_{r+2}} \dots y_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}} \dots u_{k_{n-1}})} \cdot \quad (h_1 \dots h_r \gtrless n)$$

Se teniamo conto delle equazioni $\theta_{k_r \dots k_{n-1}, n} = 0$, le (7) e (5) dànno

$$(-1)^r \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho^{n-2r+1} \sum_b'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_r & \dots & h_{n-1} \\ k_r & \dots & k_{n-1} \end{bmatrix} \varpi_{h_1 \dots h_{r-1}, n} \right\} =$$

$$= \sum_i \sum_r^{n-1} {}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial u_{k_s}} \mathbf{B}_{i_1 \dots i_{r+1}} \frac{d(x_{i_{r+2}} \dots x_{i_n})}{d(u_{k_r} \dots u_{k_{s-1}} u_{k_{s+1}} \dots u_{k_{n-1}})} =$$

$$= (-1)^r \sum_i \frac{d(\mathbf{B}_{i_1 \dots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}} \dots y_{i_n})}{d(u_{k_r} \dots u_{k_{n-1}})} \rho^{n-r-1}.$$

Prendiamo

$$\int_0^\rho \rho^{n-r-1} \mathbf{B}_{i_1 \dots i_{r+1}} d\rho ,$$

otterremo delle funzioni che per $\rho = 0$ si annullano almeno d'ordine $n - r$; onde potremo scriverle eguali a

$$\rho^{n-r} C_{i_1 \dots i_{r+1}} ,$$

essendo le C delle funzioni sempre finite. Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho^{n-2r+1} \sum_b'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_r & \dots & h_{n-1} \\ k_r & \dots & k_{n-1} \end{bmatrix} \varpi_{h_1 \dots h_{r-1} n} \right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \sum_i \frac{d(C_{i_1 \dots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}} \dots y_{i_n})}{d(u_{k_r} \dots u_{k_{n-1}})} \rho^{n-r} \right\}.$$

Integrando si otterrà

$$\sum_b'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_r & \dots & h_{n-1} \\ k_r & \dots & k_{n-1} \end{bmatrix} \varpi_{h_1 \dots h_{r-1} n} =$$

$$= \sum_i \frac{d(C_{i_1 \dots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}} \dots y_{i_n})}{d(u_{k_r} \dots u_{k_{n-1}})} \rho^{r-1} + K_{k_r \dots k_{n-1}} \rho^{2r-n-1},$$

essendo le K delle costanti arbitrarie.

Da questa formula, tenendo conto delle (8), segue immediatamente che le equazioni

$$\theta_{k_r \dots k_n} = 0$$

resultano identicamente soddisfatte.

Dalle equazioni precedenti si deduce:

$$\varpi_{h_1 \ldots h_{r-1}\, n} =$$

$$= \sum_k'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 & \ldots & h_{r-1} \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} \end{bmatrix} \sum_i \frac{d(C_{i_1 \ldots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}} \ldots y_{i_n})}{d(u_{k_r} \ldots u_{k_{n-1}})} \rho^{r-1} +$$

$$+ \sum_k'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 & \ldots & h_{r-1} \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} \end{bmatrix} K_{k_r \ldots k_{n-1}} \rho^{2r-n-1}.$$

Ora, tenendo conto delle (4), si ha che, affinchè le p si conservino sempre finite è necessario e sufficiente che le $\varpi_{h_1 \ldots h_r}$ siano, rispetto a ρ, infinitesime almeno d'ordine r e le $\varpi_{h_1 \ldots h_{r-1}, n}$ almeno d'ordine $r - 1$. Ciò non può succedere altro che prendendo le costanti arbitrarie K nulle. Quindi otterremo:

$$\varpi_{h_1 \ldots h_r} = -\rho^r \sum_k' \sqrt{\bar{D}} \begin{bmatrix} h_1 \ldots h_r \\ k_1 \ldots k_r \end{bmatrix} \sum_i \mathbf{B}_{i_1 \ldots i_{r+1}} \frac{d(y_{i_{r+2}} \ldots y_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}} \ldots u_{k_{n-1}})}, \qquad (h_1 \ldots h_r \gtrless n)$$

$$\varpi_{h_1 \ldots h_{r-1}, n} = \rho^{r-1} \sum_k'' \sqrt{\bar{D}} \begin{bmatrix} h_1 \ldots h_{r-1} \\ k_1 \ldots k_{r-1} \end{bmatrix} \sum_i \frac{d(C_{i_1 \ldots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}} \ldots y_{i_n})}{d(u_{k_r} \ldots u_{k_{n-1}})}, (h_1 \ldots h_{r-1} \gtrless n).$$

Queste formule risolvono completamente la questione propostaci. Il processo seguito prova che, *almeno nel caso in cui S_{n-1} sia uno spazio sferico le equazioni* (I') (II') e (III) *danno le condizioni necessarie e sufficienti* a cui debbono soddisfare le b affinchè possano corrispondere ad esse delle p che soddisfacciano le (1) e (1').

Pisa, ottobre 1889.

VITO VOLTERRA.

ESTRATTI DAI VERBALI.

[*Vedi*: t. I, p. 1-28, 45-88, 119-156, 379-390; t. II, p. 77-96, 152, 184-188; t. III, p. 230-235].

Per le pubblicazioni periodiche e non periodiche ricevute in dono o in cambio dei Rendiconti e presentate nelle varie Adunanze, veggasi la Seconda Parte: *Biblioteca Matematica*

ADUNANZA DEL 14 LUGLIO 1889 (Presidenza G. Albeggiani).

Corrispondenza. — Il signor Camillo Jordan ringrazia per la sua nomina a Socio non residente e a delegato speciale del Circolo al Congresso internazionale di Bibliografia delle scienze matematiche che sarà tenuto in Parigi dal 16 al 26 del corrente mese.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete il dott. Ettore Bortolotti (Bologna), proposto dai soci Pincherle e Guccia, è eletto *Socio non residente.*

Memorie e Comunicazioni.

VIVANTI: *Osservazioni sui punti singolari essenziali.*

GIUDICE: *Sulla possibilità di funzioni di stesso valore, equivalenti, non identiche.*

Alla domanda ch'io ho rivolta prima velatamente e poi apertamente a questo Circolo (*) parmi che risponda la seguente considerazione.

Se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono funzioni date nell'intervallo (a, b), perchè $\int_a^x \varphi(x).\,dx$ ed $\int_a^x f(x).\,dx$ siano eguali in tutto l'intervallo è necessario e sufficiente che, essendo il medesimo suddiviso in n parti eguali, la somma complessiva degli intervalli parziali in cui $f(x)$ non è sempre eguale a $\varphi(x)$ divenga infinitesima quando n tende all'infinito (**).

Si possono quindi facilmente concepire delle funzioni che hanno sempre lo stesso valore e non sono sempre identiche.

Per es. Se $f(x)$ è continua in tutto l'intervallo (a, b) ed è $f(x) \gtrless \varphi(x)$ in tutti i punti d'un gruppo di prima specie (***) contenuto in (a, b) ed $f(x) = \varphi(x)$ in tutti gli altri punti, sono eguali in tutto l'intervallo (a, b) le funzioni, di x,

$$\int_a^x f(x).\,dx \qquad \int_a^x \varphi(x).\,dx$$

sebbene esista sempre la derivata della prima mentre non esiste quella della seconda

(*) *Rend.* 1888; pag. 28, 94, 188.

(**) *Vedi* p. es. Darboux, *Sur les fonctions discontinues* (Annales de l'École Normale supérieure; II_4, 1875, pag. 72).

(***) *Vedi* p. es. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale* (Pisa 1878 pag. 17 e 18).

nei punti del detto gruppo di prima specie ed in quelli che, senza appartenere a questo, ne sono punti limiti.

ADUNANZA DEL 28 LUGLIO 1889 (Presidenza G. Albeggiani).

Corrispondenza. — Il prof. R. Felici aderisce al cambio del *Nuovo Cimento* coi *Rendiconti* del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

DEL PEZZO: *Sui sistemi di curve e di superficie.*

GUCCIA: *Sulle singolarità composte delle curve algebriche piane.*

ADUNANZA DELL'11 AGOSTO 1889 (Presidenza G. Albeggiani).

Memorie e Comunicazioni.

GUCCIA: *Ricerche sulle superficie e le curve gobbe algebriche dotate di singolarità qualunque.*

ADUNANZA DEL 25 AGOSTO 1889 (Presidenza G. B. Guccia).

Corrispondenza. — Il dott. Ettore Bortolotti ringrazia per la sua nomina a Socio del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

ALBEGGIANI (M. L.): *Rivista bibliografica su di uno scritto del signor Clasen.*]

Fra i lavori pervenuti in dono alla Biblioteca del Circolo piacemi ricordare una monografia del sig. B.-I. Clasen, canonico della cattedrale di *Lussemburgo*, dal titolo: *Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants* (Paris, Gauthier-Villars, 1889).

Dopo i lavori del sig. Rouché sembrava che fossero esaurite tutte le ricerche da potersi fare nel campo di questa parte dell'algebra elementare, però l'abate *Clasen* con il lavoro citato ha contribuito non solo dal punto di vista teorico, bensì ancora dal lato di una più spedita applicazione del calcolo, a completare gli studii relativi alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

Lo spazio del quale possiamo disporre non ci permette di dare una lunga analisi dello scritto del sig. *Clasen*; ci limiteremo quindi a dire brevemente in che consiste il nuovo metodo e ad enumerarne i pregi, rimandando, pel resto, il lettore alla memoria originale pubblicata negli *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (1887-88, t. XII, pp. 251-281), o al lungo rapporto fattone alla sudetta società scientifica dal sig. P. Mansion (ivi pp. 50-59).

Il metodo del sig. Clasen ha suo fondamento in quello elementare di addizione e sottrazione, però opportunamente adoperato ed inteso in un senso più lato che per l'ordinario. Sia infatti da risolvere il sistema di equazioni:

(1) $X_1(x,y,z,u)=0,\ Y_1(x,y,z,u)=0,\ Z_1(x,y,z,u)=0,\ U_1(x,y,z,u)=0,$
dove X_1, Y_1, Z_1, U_1 indicano funzioni lineari delle quantità chiuse in parentesi; il sig. Clasen, servendosi del metodo di addizione e sottrazione, elimina una delle incognite, p. es. la x tra le prime due equazioni del sistema (1), in tal modo si ha

l'equazione $Y_2 (y, x, u) = 0$; di poi tra questa e l'equazione $X_1 = 0$, per mezzo dello stesso metodo, elimina un'altra incognita, p. es. la y, ottiene così l'equazione $X_2 (x, z, u) = 0$. Queste due equazioni possono essere sostituite alle prime due del sistema dato, il quale si muta perciò nell'altro:

(2) $X_2 (x, z, u) = 0,\ Y_2 (y, z, u) = 0,\ Z_1 (x, y, z, u) = 0;\ U_1 (x, y, z, u) = 0.$

Ora applicando, in senso lato, lo stesso metodo di addizione e sottrazione elimina, ad un tempo, dalle prime tre equazioni del sistema (2) le incognite x, y; in tal modo si trova l'equazione $Z_3 (z, u) = 0$; in seguito tra questa equazione e ciascuna delle prime due del sistema (2), servendosi sempre del metodo di addizione e sottrazione, elimina un'altra incognita, p. es. la z, ottiene in tal maniera due nuove equazioni che con la $Z_3 = 0$, possono essere sostituite alle prime tre equazioni del sistema (2), il quale diventa:

(3) $X_3 (x, u) = 0,\ Y_3 (y, u) = 0,\ Z_3 (z, u) = 0,\ U_1 (x, y, z, u) = 0.$

Ora analogamente elimina, come sopra, in unica volta, le incognite x, y, z tra le quattro equazioni del sistema (3) ottiene così l'equazione $U_4 (u) = 0$ ed infine eliminando u tra questa ultima equazione e ciascuna delle prime tre equazioni del sistema (3) ottiene il sistema di equazioni ad incognite separate:

(4) $X_4 (x) = 0,\ Y_4 (y) = 0,\ Z_4 (z) = 0,\ U_4 (u) = 0,$

sistema il quale, come è facile dimostrare, equivale a quello dato.

Pertanto è da notare, che, mentre il metodo di addizione e sottrazione, nella maniera come ordinariamente viene adoperato, nonchè gli altri metodi elementari, introducono fattori comuni a tutti i termini delle varie equazioni, rendendo così più laboriosi i calcoli, senza dar modo d'avvertirne la presenza avanti che venissero introdotti, il metodo adoperato dal sig. Clasen, elementare del resto quanto gli altri, segnala i fattori che s'introducono, permette quindi di liberarsene, nello stesso tempo che porge un metodo di verifica dei vari calcoli, poichè tutte le divisioni che in esso debbonsi eseguire sono divisioni le quali devonsi fare esattamente, di maniera che, ove tanto non avvenga, si è sicuri che un qualche errore ebbe ad incorrere nelle operazioni.

Il nuovo metodo riduce almeno di $1/5$ le operazioni a svilupparsi per risolvere un sistema di equazioni lineari e permette di conoscere se una nuova equazione, della quale va ad usarsi, sia incompatibile con quelle già ottenute ovvero ne sia una conseguenza, mentre con gli ordinari metodi i casi d'incompatibilità e d'indeterminazione debbono essere trattati a parte. Finalmente giova osservare, che siffatto metodo offre ancora modo di calcolare speditamente un determinante numerico, anche di un grande numero di elementi, poichè in vero basta pensare, come dice l'A. che « risolvere delle « equazioni lineari vale tanto quanto calcolare dei determinanti ».

ADUNANZA DEL 10 NOVEMBRE 1889 (Presidenza G. B. Guccia).

Corrispondenza. — Il Presidente comunica una Lettera del Sindaco di Palermo, Duca della Verdura, in data del 23 ottobre u. s., con la quale si partecipa alla Società che la Giunta Municipale di Palermo ha deliberato, a titolo d'incoraggiamento,

una largizione di Lire 300 al Circolo Matematico.—La Società delibera, all'unanimità, di ringraziare il Sindaco e la Giunta Municipale di Palermo.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazioni a schede segrete, i signori: prof. dott. Martin Krause (Dresda), proposto dai soci Guccia e Maisano; prof. dott. Francesco Porro (Torino), proposto dai soci Segre e Peano; Del Vecchio Giacomo (Gravina), proposto dai soci Certo e Guccia; sono eletti soci *non residenti* del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

VOLTERRA: *Sulla integrazione di un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali che si presenta nella teoria delle funzioni coniugate.*

MAISANO: *L'Hessiano della Sestica binaria e il discriminante della forma dell'ottavo ordine* (Nota II).

GUCCIA: Segnala fra le pubblicazioni pervenute in dono al Circolo il *Curso de Analyse infinitesimal* por F. Gomes Teixeira, Calculo integral, Primeira Parte, Porto, Typ. Occidental, 1889.

ADUNANZA DEL 24 NOVEMBRE 1889 (Presidenza G. Albeggiani).

Memorie e Comunicazioni.

VIVANTI: *Sulle equazioni algebrico-differenziali del primo ordine.*

ADUNANZA DEL 22 DICEMBRE 1889 (Presidenza G. Albeggiani).

Il Segretario partecipa alla Società che il socio non residente signor Giorgio Humbert si è fatto inscrivere, ai sensi dell'Art. 11 dello Statuto, come *socio perpetuo*, versando in unica volta nella Cassa del Circolo la somma di lire trecento.

Il prof. Martin Krause ringrazia per la sua ammissione a socio del Circolo.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete il signor Giuseppe Bagnera (Palermo), proposto dai soci Guccia ed Albeggiani (M. L.), è eletto *socio residente.*

Memorie e Comunicazioni.

ALAGNA: *Condizioni perchè una forma dell'ottavo ordine abbia quattro punti doppi.*

GERBALDI: *Sulla forma binaria cubica.*

In una Nota inserita in questi *Rendiconti* (t. II, p. 25-27) il prof. Virginio Retali ha dato alcune costruzioni di problemi riguardanti la forma cubica binaria con due punti imaginarii coniugati, rappresentando questi con un *punto-circolo*. Tali costruzioni sono suscettibili di alcune semplificazioni, che io credo interessante di rilevare.

1° Nella soluzione del problema *a*) non è necessario che il circolo K^2 abbia il centro O sulla retta r.

2° La soluzione del problema *b*) si può modificare come segue: Si descrivono due circoli, l'uno pei punti A, H_1 col raggio $\overline{AH_1}$, l'altro pei punti A, H_2 col raggio $\overline{AH_2}$, coi centri dalla stessa banda o da bande opposte della retta r secondo che il punto A cade dentro o fuori del segmento $\overline{H_1 H_2}$; tali due circoli si tagliano, oltrecchè nel punto A, nel punto domandato P.

3° E alla soluzione del problema *c*) si può sostituire la seguente: Si costruisca un rettangolo su PA in modo che una diagonale cada su r, sia P' il vertice opposto a P; a partire da A si prendono su AP due segmenti $\overline{A_1 A} = \overline{A A_2} = \frac{1}{3}\overline{AP}$; poi si tirano $\overline{P'A_1}$ e $\overline{P'A_2}$ e dal punto P si abbassano le perpendicolari su queste rette; ognuno dei piedi di queste perpendicolari, considerato come punto-circolo, segna sopra r i due elementi imaginarii coniugati domandati.

VENTURI: *Sulle deviazioni locali in longitudine e latitudine per l'Osservatorio di Palermo.*

Il socio HUMBERT comunica verbalmente i seguenti «*Théorèmes concernant une classe de surfaces algébriques*»:

I. — Si l'on peut tracer sur une surface algébrique, S, une série de courbes, C, de même genre, p, et de mêmes modules, on peut y tracer une seconde série de courbes, C', de même genre, p', et de mêmes modules.

Les coordonnées d'un point quelconque de la surface peuvent alors se mettre sous la forme

$$\rho x_i = \sum \Theta(u)\theta(v), \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Θ et θ étant des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes. Les courbes C s'obtiennent en faisant $u =$ constante; les courbes C' en faisant $v =$ constante.

II. — Si les courbes C sont découpées sur S par un système de surfaces algébriques

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) = 0,$$

F étant rationnel en λ et chaque surface du système coupant S selon une seule courbe C mobile, les courbes C' sont unicursales.

Plus généralement, si les courbes C sont découpées par un système algébrique

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda, \mu) = 0,$$

F étant rationnel en λ et μ, et les paramètres λ et μ étant liés par une relation de genre p', les courbes C' seront de genre p', et réciproquement.

III. — Si un faisceau ponctuel de surfaces découpe sur S des courbes C de mêmes modules (chaque surface du faisceau coupant S selon une seule courbe C mobile) la surface S est représentable point par point sur un cône de même genre et de mêmes modules que les courbes C.

Du premier de ces théorèmes, et spécialement de la représentation indiquée pour

les coordonnées d'un point de la surface, se déduisent immédiatement plusieurs propositions qui mettent en évidence une liaison intéressante entre les courbes C et C'.

Si, par exemple, *sur une courbe* C_0 *de la première série, on considère m points formant un* GROUPE, Γ, *dans le sens de M. Nöther, on pourra faire passer par chacun de ces points une courbe* C', *dont l'ensemble déterminera, sur toute courbe* C, *un* GROUPE *de m points de même nature que le groupe primitif.*

Ainsi: Γ *étant un groupe spécial, les groupes nouveaux seront aussi des groupes spéciaux, de même multiplicité et de même indice que* Γ; si l'on choisit sur C_0 deux groupes Γ_1 et Γ_2, résiduels ou corésiduels entre eux, les groupes correspondants sur chaque courbe C seront résiduels ou corésiduels, etc.

Les courbes C jouissent par rapport aux courbes C' *de la même propriété.*

Si nous appelons *point spécial* d'une courbe gauche un point de cette courbe jouissant, par rapport aux surfaces adjointes, d'une propriété invariante pour toutes les transformations univoques de la courbe en elle-même ou en une autre courbe de même degré et de mêmes modules, on peut dire aussi que *le lieu d'un point spécial, d'une espèce donnée, sur les courbes C, est une courbe* C', puisqu'un tel point est caractérisé par une valeur déterminée du paramètre v.

Ainsi, si l'on considère sur chaque courbe C les n points en chacun desquels une surface adjointe d'un ordre donné a un contact de l'ordre le plus élevé possible avec la courbe, *le lieu de ces n points se décompose en n courbes* C'; etc.

Comme exemple, nous indiquerons les surfaces sur lesquelles on peut tracer une série simplement infinie de cubiques planes, C, de même module.

Le lieu des points d'inflexion de ces cubiques se décompose en neuf courbes C', *ayant toutes le même genre et les mêmes modules;* de même *le lieu des points sextactiques se décompose en courbes* C' *de la même série;* de même aussi le lieu des points de contact des tangentes issues d'un point sextactique, etc.

Si trois points d'une cubique sont en ligne droite, on peut faire passer par ces points trois courbes C', *qui déterminent sur toute autre cubique de la série trois points également en ligne droite; si deux points d'une cubique forment un couple steinérien, on peut faire passer par ces points deux courbes* C' *déterminant sur toute autre cubique un couple steinérien*, etc.

La surface du troisième ordre se prête très simplement à l'application de ces théories.

Dans le cas général, les surfaces dont nous avons donné la représentation paramétrique sont telles qu'à un point x ne correspond qu'un seul système de valeurs de u et de v; supposons cette condition satisfaite, on peut alors énoncer les résultats suivants:

Soient m et p, m' et p' les degrés et les genres des courbes C et C'. *Le genre de la surface sera* pp', et en général: *son second genre* (Curvengeschlecht) $8(p-1)(p'-1)+1$; *son degré* $2mm'$; *le genre des sections planes* $mm'+mp'+m'p-m-m'+1$.

NUOVI SOCI (1889).

[*Vedi* gli Elenchi precedenti nel tomo II, pp. 13-22 e 227-229].

RESIDENTI

DATA DELLA NOMINA.

1889, 22 dicembre. **Bagnera** Giuseppe. — *Via Giojamia, 33.*

1889, 24 marzo. **Bottino** Francesco, ingegnere, prof. nel IV° Ginnasio di Palermo. — *Via Bandiera, 44.*

NON RESIDENTI

1889, 14 luglio **Bortolotti** Ettore, dottore in Matematica, assistente alle cattedre di Algebra e Calcolo infinitesimale nella R. Università di Bologna. — *Bologna.*

1889, 10 marzo. **Burali-Forti** Cesare, dottore in Matematica, prof. alla R. Accademia Militare di Torino. — *Torino.*

1889, 13 gennajo. **Castelnuovo** Guido, dottore in Matematica, assistente nel corrente anno scolastico alla cattedra di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino.—*3, piazza Statuto—Torino;* ovvero: *Santa Fosca—Venezia.*

1889, 10 novembre. **Del Vecchio** Giacomo, prof. nel R. Ginnasio di Gravina.—*Gravina.*

1889, 12 maggio. **Frattini** Giovanni, dottore in Matematica, libero docente di Algebra nella R. Università e prof. nel R. Istituto Tecnico e nel R. Collegio Militare di Roma. — *Roma.*

1889, 9 giugno. **Jordan** Camillo, membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, sezione di Geometria), corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, membro della Società Filomatica di Parigi, della Società Matematica di Francia, dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze, etc.; ingegnere capo delle Mine; direttore del *Journal de Mathématiques pures et appliquées;* professore al Collegio di Francia e alla Scuola Politecnica.—*Rue de Varenne, 48—Paris.*

1889, 10 novembre. **Krause** Martin Johann, dottore in Filosofia, prof. ord. nel Politecnico di Dresda. — *Dresden.*

DATA DELLA NOMINA.

1889, 24 marzo. **Lebon** Ernest, aggregato di matematiche (insegnamento speciale), membro dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze; già prof. supplente di Geometria descrittiva al Conservatorio di Arti e Mestieri di Parigi; prof. di matematiche nel Liceo Carlomagno di Parigi; redattore capo del *Bulletin scientifique*. — *Rue de Mézières, 5 — Paris.*

1889, 27 gennajo. **Moore** Eliakim Hastings, Jr., dottore in Filosofia, membro dell'Accademia delle Scienze del Connecticut, ripetitore di Matematica nella « Yale University ». — *70, North Middle, Yale University — New Haven (Connecticut).*

1889, 13 gennajo. **Padelletti** Dino, dottore in Matematica, membro della R. Accademia delle Scienze di Napoli; prof. ord. di Meccanica razionale nella R. Università di Napoli. — *Arco Mirelli, 36 — Napoli.*

1889, 10 marzo. **Pieri** Mario, dottore in Matematica, prof. alla R. Accademia Militare di Torino. — *Torino.*

1889, 24 febbrajo. **Pittarelli** Giulio, dottore in Matematica, prof. straord. di Geometria descrittiva nella R. Università ed incaricato delle Applicazioni di Geometria descrittiva nella R. Scuola d'applicazione per gl' Ingegneri in Roma. — *Via Principe Umberto, 145 — Roma.*

1889, 10 novembre. **Porro** Francesco, dottore in Matematica, inc. di Astronomia nella R. Università di Torino, ff. di Direttore del R. Osservatorio Astronomico di Torino. — *Torino.*

1889, 28 aprile. **Sadun** Elcia, dottore in Matematica, prof. nella R. Scuola Tecnica Pietro Della Valle e nel R. Collegio Militare di Roma. — *Via Clementina, 3 — Roma.*

1889, 10 febbrajo. **Visalli** Pietro, dottore in Matematica, libero docente nella R. Università di Messina, prof. di Matematica nella R. Accademia Navale di Livorno. — *Livorno.*

G.-B. G. M.-L. A.

	ERRATA	CORRIGE
Pagina 63, linea 16	$m^2(p-1)$	$m^2(p-1)f_1^2$
» 64, » 17	$\frac{4}{3}A_1 f_2$	$\frac{1}{3}A_1 f_2$
» » » 19	$\frac{4}{3}A_2 f_1$	$\frac{1}{3}A_2 f_1$

INDICE

ESTRATTI DAI VERBALI

MEMORIE E COMUNICAZIONI

INDICE GENERALE

Fine della Parte 1ª del Tomo III (1889).

Tip. Matematica di Michele Amenta, Palermo.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

ANNUNZIO.

Col titolo di « Biblioteca Matematica » il Circolo Matematico di Palermo pubblica un bollettino bibliografico della produzione matematica nazionale e straniera, il quale comprende:

nella rubrica **pubblicazioni periodiche**, il sommario degli articoli di matematica contenuti negli atti di Accademie, riviste e giornali di scienza, coi quali il Circolo scambia i suoi *Rendiconti;*

nella rubrica **pubblicazioni non periodiche**, l'elenco delle opere, memorie, note, etc. di Matematica, che pervengono in dono alla biblioteca del Circolo.

Gli Autori, gli Editori e le Direzioni di Accademie, Società e Periodici scientifici, sono pregati di dirigere le pubblicazioni all'indirizzo:

CIRCOLO MATEMATICO — Via Ruggiero Settimo, 28 — Palermo.

RENDICONTI

DEL

IRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO III. — ANNO 1889.

PARTE SECONDA : BIBLIOTECA MATEMATICA.

PALERMO,

SEDE DELLA SOCIETÀ

28, via Ruggiero Settimo, 28

1889

BIBLIOTECA MATEMATICA.

PUBBLICAZIONI PERIODICHE

COLLE QUALI IL CIRCOLO SCAMBIA I SUOI *Rendiconti.*

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris.

[*Vedi* t. II, pag. 42].

TOME CVII (SECOND SEMESTRE 1888).

Nº 1 (2 juillet):

Perrin: Sur les *criteria* des divers genres de solutions multiples communes à deux équations (22-24).
Saint-Loup: Sur la représentation graphique des diviseurs des nombres (24-26).

Nº 2 (9 juillet):

Poincaré: Sur la figure de la Terre (67-71).
Jensen: Observations sur une Communication de M. Cesàro (81-82).

Nº 3 (16 juillet):

Lemoine: De la mesure de la simplicité dans les constructions géométriques (169 171).

Nº 4 (23 juillet):

Bertrand: Note sur le tire à la cible (205-207).
Jonquières (*de*): Nouvelles recherches sur la construction, par deux faisceaux projectifs, de la surface générale du troisième ordre (209-214).
Perrin: Sur les *criteria* des divers genres de solutions multiples communes à trois équations à deux variables (219-221).
Painlevé: Sur les équations différentielles du premier ordre (221-224).
Schlesinger: Sur les courbes de genre un (224-227).

N° 5 (30 juillet):

Painlevé: Sur les équations différentielles du premier ordre (320-323).

N° 6 (6 août):

(alcuna comunicazione di matematica pura).

N° 7 (13 août):

Lévy (*Maurice*): Sur une propriété générale des corps solides élastiques (414-416).
Cesàro: Remarques relatives aux objections faites par M. Jensen à l'une de ses précédentes Communications (426-427).

N° 8 (20 août):

Jonquières (*de*): Construction géométrique d'une surface, à points doubles, du quatrième ordre (430-432).

N° 9 (27 août):

Lévy (*Maurice*): Observation relative à une précédente Communication « Sur une propriété générale des corps solides élastiques » (453-454).

N° 10 (3 septembre):

Kœnigs: Sur le volume engendré par un contour lié invariablement au trièdre d'une courbe, et, en particulier, sur une propriété des courbes de M. Bertrand (474-476).
Picard: Sur une classe d'équations linéaires aux derivées partielles (476-478).

N° 11 (10 septembre):

Tisserand: Remarque sur un point de la théorie des inégalités séculaires (485-488).

N° 12 (17 septembre):

Cesàro: Sur une récente Communication de M. Lévy (520-522).

N° 13 (24 septembre):

Bertrand: Généralisation d'un théorème de Gauss (537-538).

N° 14 (1 octobre):

Callandreau: Énergie potentielle de la gravitation d'une planète (555-557).

N° 15 (8 octobre):

Picard: Sur la transformation de Laplace et les équations linéaires aux derivées partielles (594-597).

N° 16 (15 octobre):

Stieltjes: Sur l'équation d'Euler (617-618).

N° 17 (22 octobre):

Stieltjes: Sur la réduction de la différentielle elliptique à la forme normale (651-653).

erat: Sur les surfaces de singularités des systèmes de courbes construits avec un élément donné (653-656).

cia: Sur l'intersection de deux courbes algébriques en un point singulier (656-658).

N° 18 (29 octobre):

(alcuna comunicazione di matematica pura).

N° 19 (5 novembre):

sal: Essai sur la théorie du ressort Belleville (713-718).

inlevé: Sur les équations différentielles du premier ordre (724-726).

ilbert: Groupement et construction géométrique des accélérations dans un solide tournant autour d'un point fixe (726-729).

rænell et Bachy: Sur les calculs de résistance des systèmes réticulaires à lignes ou conditions surabondantes (729-731).

N° 20 (12 novembre):

Appell: Sur une classe d'équations différentielles réductibles aux équations linéaires (776-778).

N° 21 (19 novembre):

Tisserand: Sur le satellite de Neptune (804-810).

Gilbert: Sur les accélérations des points d'un solide tournant autour d'un point fixe et sur les centres de courbure de leurs trajectoires (830-831).

Frolov: Sur les égalités à deux degrés (831-832).

N° 22 (26 novembre):

Caspary: Sur une manière d'exprimer, au moyen des fonctions thêta d'un seul argument, les coefficients de trois systèmes orthogonaux dont un est composé des deux autres (859-862).

N° 23 (3 décembre):

Poincaré: Sur les satellites de Mars (890-892).

Goursat: Sur les invariants des équations différentielles (898-900).

Caspary: Sur l'application des fonctions thêta d'un seul argument aux problèmes de la rotation (901-903).

Guccia: Théorème général concernant les courbes algébriques planes (903-904).

N° 24 (10 décembre):

Caspary: Sur l'application des fonctions thêta d'un seul argument aux problèmes de la rotation (937-938).

Picard: Sur une proposition générale concernant les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre (939-941).

Bois-Reymond (*P. du*): Sur les caractères de convergence et de divergence des séries à termes positifs (941-944).

Raffy: Sur la rectification des cubiques planes unicursales (944-946).

Saint-Germain (de): Sur l'extension à certains points de l'une des propriétés mécaniques du centre de gravité (946).
Gilbert: Sur les accélérations d'ordre quelconque des points d'un corps solide qui a un point fixe *O* (946-947).

N° 25 (17 décembre):

Poincaré: Sur la théorie analytique de la chaleur (967-971).
Picard: Sur un théorème relatif à l'attraction (984-985).
Bertrand: Remarques relatives à la Communication précédente (985-986).
Pincherle: Sur le développement d'une fonction analytique en série de polynômes (986-989).

N° 26 (24 décembre) — Séance publique annuelle:

PRIX DÉCERNÉS POUR L'ANNÉE 1888:

Grand prix des sciences mathématiques: M. Émile Picard (Rapporteur: M. *Poincaré*) (1039-1041).
Prix Bordin: Mme Sophie de Kowalewsky (Rapporteur: M. *Darboux*) (1042).
Prix Francœur: M. Émile Barbier (Rapporteur: M. *Bertrand*) (1043).
Prix Poncelet: M. Collignon (Rapporteur: M. *Bertrand*) (1043).

PROGRAMME DES PRIX PROPOSÉS POUR LES ANNÉES 1889, 1890, 1891 et 1893.

N° 27 (31 décembre):

(alcuna comunicazione di matematica pura).

Philosophical Transactions of the Royal Society of London (A).

FOR THE YEAR MDCCCLXXXVII — VOL. 178:

Culverwell: On the Discrimination of Maxima and Minima Solutions in the Calculus of Variations (95-129).
Lamb: On Ellipsoidal Current-Sheets (131-159).
Sylvester and *Hammond*: On Hamilton's Numbers (285-312).
Darwin (G. H): On Figures of Equilibrium of Rotating Masses of Fluid (379-428).
Thomson: Some Applications of Dynamical Principles to Physical Phenomena. Part II. (471-526).

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei.

[*Vedi* t. II, p. 46].

VOLUME IV (1888) — SECONDO SEMESTRE.

Battaglini: Sui punti sestatici di una curva qualunque. Nota Iª (238-246).
Betti: Sopra la Entropia di un sistema Newtoniano in moto stabile. Nota Iª (113-115). Nota IIª (195-198).
Bianchi: Sulle superficie Fuchsiane (161-165).

Brioschi: Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni iperellittiche a due variabili. Nota Iª (341-347). Nota IIª (429-436).

Cesàro: Sur une distribution de signes (133-138).

— Moti rigidi e deformazioni termiche negli spazii curvi (376-384).

Padova: Sulla teoria delle coordinate curvilinee. Nota Iª (369-384). Nota IIª (454-458).

Tonelli: Sopra una certa equazione differenziale a derivate parziali del 2° ordine (384-388).

— Sopra una certa equazione a derivate parziali del 3° ordine (458-461).

Volterra: Sulle funzioni analitiche polidrome (355-361).

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.

VOL. VI. — PART IV (Lent and Easter Terms, 1888):

Hobson: On a Radiation Problem (184-187).

Brill (J.): Notes on Conjugate Functions and Equipotential Curves (187-199).

Bryan: On the Stability of Elastic Systems (199-210).

Brill (J.): Orthogonal Systems of Curves and of Surfaces (230-245).

Bryan: On the waves on a viscous rotating cylinder, an illustration of the influence of viscosity on the stability of rotating liquid (248-264).

Giornale di Matematiche

ad uso degli studenti delle Università Italiane, pubblicato per cura del prof. G. Battaglini, in Napoli.

TOMI I-X (1863-1872):

Albeggiani: Sviluppo di un determinante ad elementi binomii ed applicazioni (X, 279-293).

Allocati: Dimostrazione di un teorema di Villarceau (I, 284-285).

Anonimo: Sopra due quistioni del Salmon nel trattato delle coniche (VII, 254-255).

Armenante: Sui determinanti cubici (VI, 175-181).

— Sopra un'equazione dell'ottavo grado (*Vedi* Jung) (VII, 98-104).

— Relazione sulle lezioni complementari date nell'Istituto Tecnico superiore di Milano (*idem*) (VII, 224-234).

— Sulle trasformazioni birazionali o univoche, e sulle curve normale e subnormale del genere p (*idem*) (VII, 235-253).

Arzelà: Sopra alcune applicazioni di una formola data da Jacobi (IX, 32-37).

Aschieri: Sopra un complesso di secondo grado (VIII, 35-37).

— Sopra un complesso di secondo grado. Generazione geometrica dei complessi di 1° grado (VIII, 229-234).

— Sopra i sistemi di rette (X, 343-346).

Ascoli: Alcuni teoremi sulle curve piane algebriche (V, 358-364, 365-366).

— Sopra un teorema di Jonquières (V, 377).

— Un teorema di geometria (V; 378-380).

Barillari: Sulla divisibilità dei numeri periodici, e sulla determinazione dei periodi decimali (IX, 125-135).

Battaglini: Teoria elementare delle forme geometriche (I, 1-6, 41-46,97-109,161-169, 227-239).

— Sulle serie di curve d'indice qualunque (I, 170-174).

— Intorno ai sistemi di 2° ordine, e di 2ª classe (I, 287-290).

— Sulla dipendenza duplo-anarmonica (I, 321-328).

— Sul parallelogrammo delle forze (I, 365-367).

— Intorno alle condizioni d'equilibrio d'un sistema di forma invariabile (I, 367-368).

— Sulle divisioni omografiche immaginarie (II, 142-151).

— Sulle forme binarie dei primi quattro gradi (II, 170-179,193-202,243-253,340-351; III, 24-31,51-59,215-227).

— Intorno ad una memoria del signor Turazza (II, 295-297).

— Sulle forme binarie di 2° grado (III, 22-23).

— Sulle forme geometriche di 2ª specie (III, 298-310; IV, 96-122,174-186).

— Sull'equilibrio di quattro forze nello spazio (IV, 93-95).

— Sopra una curva di 3ª classe e di 4° ordine (IV, 214-222).

— Sulle forme binarie dei primi quattro gradi appartenenti ad una forma ternaria quadratica (V, 39-56).

— Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky (V, 217-231).

— Intorno ai sistemi di rette di primo grado (VI, 24-36).

— Intorno ai sistemi di rette di secondo grado (VI, 239-258; VII, 55-75).

— Sulle forme ternarie quadratiche (VIII, 38-59, 129-156).

— Sulle forme binarie di grado qualunque (IX, 1-18,76-86).

— Sugli assi principali (IX, 38-45).

— Sui determinanti (IX, 136-144).

— Sulle forme ternarie di grado qualunque (IX, 152-169,193-205).

— Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque (X, 55-75).

— Sulla composizione delle forze (X, 133-140).

— Sulla teorica dei momenti (X, 175-180).

— Sulle serie di sistemi di forze (X, 180-187).

— Sul movimento geometrico infinitesimo d'un sistema rigido (X, 207-216).

— Sul movimento geometrico finito d'un sistema rigido (X, 295-302).

Bertini: Nuova dimostrazione del teorema « Due curve punteggiate proiettivamente sono dello stesso genere » (VII, 105-106).

Besso: Sull'integral seno, e l'integral coseno (VI, 313-323).

— Del concetto di funzione nell'insegnamento della geometria elementare (VII, 131-136).

— Sull'integrale $\int_0^\beta \frac{\operatorname{sen}^m x}{x} dx$ (VII, 210-212).

— Sopra alcuni integrali doppii (X, 79-92).

— Sopra alcuni integrali definiti (X, 119-127).

— Sulla serie $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^\mu}$ (X, 160-164).

Betti: Necrologia di Ottaviano Fabrizio Mossotti (I, 92).

— Sopra le funzioni algebriche d'una variabile complessa definita da un'equazione di 3° grado (III, 143-145).

Bolyai: Sulla scienza dello spazio assolutamente vera (traduzione dal latino di Battaglini) (VI, 97-115).

Beltrami: Soluzione d'un problema relativo alle superficie di 2° ordine (I, 68-73).

— Sulle coniche di 9 punti (I, 109-118).

— Sulle equazioni algebriche (I, 123-124).

— Estensione allo spazio di 3 dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di 9 punti (I, 208-217, 354-360).

— Articolo bibliografico sulla Teoria dei sistemi semplici di coordinate, e sulla discussione dell'equazione generale di 2° grado in coordinate triangolari e tetraedriche di Chelini (I, 319-320).

— Ricerche di analisi applicata alla geometria (II, 267-282,297-306,331-339,355-375; III, 15-22,33-41,82-91,228-240,311-314).

— Di alcune proprietà generali delle curve algebriche (IV, 76-92).

— Dimostrazione di due formule di Bonnet (IV, 123-127).

— Di una proprietà delle linee a doppia curvatura (V, 21-22).

— Intorno ad una trasformazione di variabili (V, 24-27).

— Corrispondenza (V, 89-92).

— Sulla minima distanza di due rette (V, 351-354).

— Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea (VI, 284-312).

— Articolo bibliografico sulla teorica generale delle funzioni di variabili complesse del prof. Casorati (VII, 29-41).

— Alcune formule per la teoria elementare delle coniche (IX, 341-344).

— Intorno ad una trasformazione di Dirichlet (X, 49-52).

— Teoremi di geometria pseudosferica (X, 53-54).

— Del moto geometrico d'un solido che ruzzola sopra un'altro solido (X, 103-115).

— Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche (X, 147-159).

— Necrologia di Alfredo Clebsch (X, 347-348).

Brioschi: Intorno ad una trasformazione delle forme quadratiche (I, 26-29).

— Sopra una proprietà delle forme ternarie (I, 65-67).

— Lezioni sulla teoria delle funzioni Jacobiane ad un solo argomento (II, 8-12, 33-39, 129-134).

— Corrispondenza (Vedi Cremona) (VII, 51-54).

Bustelli: Determinazione analitica dei centri di pressione delle superficie immerse in un liquido omogeneo pesante (VII; 152-159, 213-220).

Caldarera: Su talune proprietà dei determinanti, in ispecie di quelli a matrici composte con la serie dei numeri figurati (IX, 223-232).

Calzolari: Nuova soluzione generale in numeri razionali della equazione

$$u^2 = a + bv + cv^2 \quad \text{(VII, 177-192).}$$

— Soluzione generale dell'equazione $y^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ (VII, 313-316).

— Ricerca dei valori razionali di v che rendono un quadrato il polinomio

$$a + bv + cv^2 + dv^3 + ev^4 \quad \text{(VII, 317-350).}$$

— Sull'equazione $u^2 = Ax^2 \pm By^2$ (VIII, 28-34).

Cassani: Studio elementare intorno all'omologia (III, 150-165).

— Saggio elementare di geometria della sfera (IV, 15-32, 131-149 223-237, 373-380).

— Intorno agli assi armonici d'un sistema di rette, e di piani (IV, 128-130).

— Coordinate sferiche omogenee (VI, 81-96).

— Studio intorno alla conica dei 9 punti e delle 9 rette (VII, 369-373; VIII, 374-376).

— Sul triangolo coniugato di due coniche (VIII, 200-201).

— Intorno alle forme binarie (X, 230-234).

Chelini: Sul teorema del Prof. Beltrami esposto a pag. 21 del vol. V, (V, 190-191).

Cremona: Sulla teoria delle coniche (I, 225-226; II, 17-20).

— Un teorema sulle cubiche gobbe (I, 278-280).

— Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane (I, 305-311; III, 269-280, 363-376).

— Corrispondenza (I, 317-318).

— Area d'un segmento di sezione conica (I, 360-364).

— Considerazione sulle curve piane del 3° ordine (II, 78-85).

— Notizia bibliografica sulle opere di Desargues (II, 115-121).

— Sulla proiezione iperboloidica d'una cubica gobba (II, 122-126).

— Nuove ricerche di geometria sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola gobba (II, 202-210).

— Sulla teoria delle coniche (III, 60-64, 113-120).

— Corrispondenza (Vedi Brioschi) (VII, 51-54).

— Corrispondenza (X, 47-48).

Crocchi: Teorema di geometria (X, 302-303).

— Osservazioni e quistione (X, 304-306).

De Bernardis: Relazione dei corsi di geometria superiore, e di Analisi superiore nella Università di Napoli negli anni 1870, 1871 (Vedi Fuortes) (IX, 233-258).

De Gasparis: Formole pel calcolo delle orbite dei pianeti e delle comete (III, 42-46).

— Rotazione d'un sistema variabile di tre masse che verificano la legge delle aree (III, 257-268, 344-362; IV, 348-352).

— Sopra una funzione, che presenta il caso d'un minimo nel problema dei tre corpi (IV, 33-37).

— Ricerche ulteriori sulla rotazione d'un sistema di tre masse che verificano la legge delle aree (IV, 202-209, 348).

— Moto d'un sistema invariabile di punti materiali esistenti in un piano intorno ...o di gravità (IV, 353-358).

— Sul calcolo del valore della funzione $\sum \frac{1}{\Gamma(x)}$ (VI, 16-23).

Del Grosso: Sulle equazioni differenziali che si presentano nei problemi di meccanica (I, 129-135, 203-208, 257-264; IV, 243-277).

— Sulle perturbazioni planetarie (V, 65-83, 129-152, 193-216; VI, 1-15, 125-152, 324-343).

— Sull'attrazione degli sferoidi (VII, 137-151; VIII, 97-128, 206-221, 333-365).

De Rossi: Sulla locale dei centri delle coniche che toccano due rette, e passano per due punti (VII, 174-175).

Di Legge: Formole relative al seno e coseno della somma degli archi (IX, 377-379).

Dini: Sull'equazione differenziale delle superficie applicabili sopra una superficie data (II, 282-288).

— Sulla teoria delle superficie (III, 65-81).

— Sulle superficie di curvatura costante (III, 241-256).

— Sopra alcune proprietà delle superficie rigate (III, 281-297).

— Sulle superficie gobbe che possono esser rappresentate da una equazione data a derivate parziali del secondo ordine (III, 321-337; IV, 305-318).

— Sulle superficie gobbe applicabili su quelle di rivoluzione, e su alcune proprietà delle superficie gobbe, delle normali principali di una curva (IV, 298-304).

— Sulle serie a termini positivi (VI, 166-174).

Dorna: Sulla catenaria di uguale resistenza (I, 73-77).

— Sulla dimostrazione del parallelogrammo delle forze (II, 63-64).

— Sulla stabilità dell'equilibrio (II, 65-72, 97-103).

— Sulle trasversali nel triangolo (III, 4).

— Nozioni teoriche sull'attrito (III, 202-213).

D'Ovidio: Due teoremi di determinanti (I, 135-139).

— Sopra un problema di geometria (I, 183-186).

— Alcune locali (I, 265-270).

— Dimostrazione di alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili di quinto ordine (III, 107-113, 184-189, 214-218).

— Nuova dimostrazione d'una formula di Abel (IV, 37-45).

— Nuova esposizione della teoria generale delle curve di secondo ordine in coordinate trilineari (VI, 46-66 190,-216, 259-283; VII, 1-16).

— Sopra due teoremi del Mannheim (VII, 107-111).

— Sui punti, piani e rette in coordinate omogenee (VIII, 241-284).

— Sul libro XII d'Euclide, e sul trattato di Archimede relativo alla misura del circolo e dei corpi rotondi (IX, 122-135).

— Alcune relazioni fra le mutue distanze di più punti (IX, 211-216).

— Sulle curve del 3° ordine circoscritte ad un quadrilatero completo (X, 16-32).

— Sopra alcune formule in coordinate di rette (X, 33-36).

— Sulle linee e superficie di 2° ordine rispetto a cui due date linee o superficie di 2° ordine sono polari reciproche (X, 313-319).

Eugenio: Dimostrazione d'un teorema d'Eulero (VII, 377)

— Dimostrazione d'un teorema nella teoria dei numeri (VIII, 162-165).

— Considerazioni intorno a taluni determinanti particolari (VIII, 285-290).

— Alcune ricerche sulle frazioni continue (IX, 358-365).

Fergola: Sopra talune proprietà delle soluzioni intere e positive dell'equazione

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n \text{ (I, 328-334).}$$

— Sopra una proposizione elementare di calcolo integrale (II, 264-266).

Fiore: Dimostrazione d'una trasformazione di determinanti (X, 170).

Foscolo: Sulla necessaria esistenza d'una radice reale od immaginaria in ogni equazione algebrica (II, 13-16).

Frattini: Sulle coordinate curvilinee (X, 235).

Fuortes: Dimostrazione d'un teorema d'Eulero (VII, 378).

— Relazione dei corsi di Geometria superiore e di Analisi superiore nell'Università di Napoli, negli anni 1870,1871 (*Vedi* De Bernardis) (IX, 233-258).

— Le sezioni piane del toro (X, 97).

— Sulle curve e sulle superficie di 2° ordine, che dividono dati segmenti armonicamente (X, 98-102).

Gambardella: Sul numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione $ax+by+cz=m$ dove a, b, c sono numeri interi e positivi (IX, 262-265).

Genocchi: Intorno al metodo diapprossimazione di Newton (II, 27-29).

— Dimostrazione d'un teorema intorno ai prodotti di alcune somme di quadrati (II, 47-48).

— Intorno ad una trasformazione di alcune equazioni a tre variabili (V, 106-109).

Grandi: Di una formola nota che si può dedurre da un teorema di Cauchy (VII, 374-375).

Hesse: I determinanti elementarmente esposti (Traduzione dal tedesco di Valeriano Valeriani) (X, 217-229, 325-342).

Hirst: Sull'inversione quadratica delle curve piane (IV, 278-293).

— Discorso sull'Introduzione agli elementi di Geometria del Prof. Wright (VI, 369-370).

— Discorso sopra Euclide come libro di testo (IX, 180-187).

Hoüel: Corrispondenza (VII, 50).

— Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit Postulatum d'Euclide (VIII, 84-89).

Imchenetsky: Sur les fonctions de Jacques Bernoulli, et sur l'expression de la différence entre une somme et une intégrale de mêmes limites (Traduction du russe par Hoüel) (IX, 87-103).

Isè: Sulla risultante di due equazioni (VIII, 1-27).

Jadanza: Sulle progressioni a due ed a tre differenze (VI, 375-379; VII, 17-23).

— Sulle progressioni ad n differenze (VII, 117-130).

Janni (G): Teorica dei contravarianti, degl'invarianti e dei covarianti (I, 174-183, 194-202, 240-253, 340-351; II, 135-142, 161-170, 211-223).

— Sopra un determinante minore d'un dato determinante (I, 270-275).

— Teorica dei determinanti simmetrici gobbi (I, 275-278).

— Sella rotazione dei corpi (V, 355-357).

— Metodo per calcolare con approssimazioni successive certe le radici reali delle equazioni algebriche (VIII, 157-160).

— Esposizione della nuova geometria di Plücker (VIII, 302-326).

— Esposizione della teorica delle sostituzioni (IX, 280-340; X, 193-206).

Janni (*V*): Teoria geometrica delle curve del 2° ordine (I, 7-10, 77-81).

— Dei diametri coniugati paralleli nel sistema di due srperficie di 2° grado (I, 223-224, 280-282).

— Sul momento di una forza preso rispetto ad un asse (I, 282-283, 351-354).

— Sulla notazione abbreviata, applicata al teorema di Brianchon (II, 253-255)

— Sulla risoluzione delle equazioni numeriche (V, 182-183).

— Dimostrazione d'un teorema di geometria elementare (VI, 371).

— Decomposizione d'una equazione di 4° grado fra due variabili, in due fattori razionali di 2° (VII, 28).

Jonquières (*de*): Corrispondenza (I, 128).

— Theorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque (IV, 45-53).

— Note sur les séries de courbes à double courbure (IV, 210-211).

— Note pour le « Giornale di Matematiche » (IV, 212-213).

Jordan: Sur la théorie des substitutions (X, 116).

Jung: Sopra alcuni teoremi di Gauss intorno alla teorica della ripartizione del circolo (VI, 67-80).

— Sopra un'equazione dell'ottavo grado (*Vedi* Armenante) (VII, 98-104).

— Relazione sulle lezioni complementali date nell'Istituto Tecnico superiore di Milano (*idem*) (VII, 224-234).

— Sulle trasformazioni birazionali o univoche, e sulle curve normale e subnormale del genere p (*idem*) (VII, 235-253).

Lemoyne: Intorno ad un problema di partizione sopra alcune funzioni simmetriche (X, 93-96).

Lobatschewsky: Pangeometria (Traduzione dal francese) (V, 273-336).

Martini: Nota sul cangiamento della variabile indipendente (II, 353-354).

— Sull'integrazione per approssimazione (III, 91-94).

Matthiessen: Quelques théorèmes sur le quadrilatère (V, 232-235).

— Résolution nouvelle de l'équation de quatrième degré (V, 234).

Mazzola: Metodo elementare per calcolare speditamente valori prossimi del rapporto della circonferenza al diametro, e per trovare tanti termini quanti si vogliono delle serie circolari. (II, 92-94, 110-114).

Mogni: Sopra gli assi permanenti di rotazione d'un corpo (II, 289-294).

— Teoria del movimento d'un punto in un piano quando si tiene conto della rotazione della terra (III, 121-132, 166-183).

— Di una proprietà dell'iperboloide (IV, 321-326).

— Sopra il pendolo ad oscillazioni coniche (IV, 327-338).

— Sopra le diverse espressioni della forza acceleratrice nella teoria delle forz centrali (IV, 339-344).

***Mollame*:** Alcuni teoremi di geometria (IX, 64-67).

— Sulla trasformazione continua d'una figura piana, la quale resti sempre omo grafica a sè stessa, e di cui quattro punti qualunque (tre dei quali non sien per diritto) descrivono quattro linee omografiche date (IX, 269-279).

***Novi*:** Riduzione in serie delle facoltà analitiche (II, 1-7, 40-46).

— Sugl'invarianti e i covarianti delle forme binarie (II, 306-314, 321-330).

***Padova*:** Sopra alcuni teoremi di Steiner (V, 240-249).

— Sui determinanti cubici (VI, 182-189).

— Bibliografia (VI, 372; VII, 221-223).

— Applicazione del metodo di Hamilton al moto d'un punto sopra una superficie (VIII, 90-96).

— Sopra due teoremi del Neumann (VIII, 296-301).

— Del moto di un ellissoide in un fluido incompressibile ed indefinito (VIII 327-332).

— Della generazione delle superficie mediante reti proiettive (IX, 148-150).

***Pantanelli*:** Disegno assonometrico (VIII, 161).

***Piuma*:** Dimostrazione di alcune formule di Liouville (IV, 1-14,65-75,193-201)

— Nota intorno ad una proposizione nella teoria dei numeri (IV, 345-347).

***Porcelli*:** Intorno ad una funzione, che entra nella composizione delle ridotte dell frazioni continue, e delle radici delle congruenze di 1° grado ad una incognit (X, 37-46).

***Rajola*:** Tre teoremi sul cerchio dei 9 punti (IV, 238-239).

***Realis*:** Sulla forma delle funzioni razionali della radice di una equazione algebric (IX, 206-210).

— Sulle radici reali contenuti fra dati limiti (IX, 355-357).

***Regis*:** Sopra un'applicazione dei principii di omologia alla prospettiva (VIII, 222-225

— Sul numero delle radici reali che può avere l'equazione $x^m - px + q =$ (VIII, 226-228).

***Retali*:** Sulle serie triple (IX, 266-268).

***Rubini*:** Teoria delle funzioni ellittiche (I, 33-40, 118-122, 140-147, 291-304).

— Articolo bibliografico sulla « Introduzione ad una teoria geometrica delle curv piane » per Luigi Cremona (I, 93-96).

— Sulla divisione d'una funzione intera per un'altra (IV, 38-44).

— Su talune formole relative ai determinanti (IV, 187-192).

— Intorno alle equazioni binomie (V, 184-189).

— Corrispondenza (VII, 111).

***Salvatore Dino*:** Sulle curve di terzo grado (I, 187-190, 334-336).

— Teorema sulle curve algebriche (I, 217-218).

— Sulla sviluppabile di quinto ordine (III, 100-107, 133-142).

***Sardi*:** Proprietà di un determinante (II, 376-380).

— Sulla riduzione alla forma canonica delle quadratiche (V, 35-38).

— Nuova dimostrazione del prodotto di due matrici (V, 174-177).
— Sui numeri primi (V, 371-376).
— Sopra una rete di biquadratiche (VI, 217-238).
— Un teorema sui determinanti (VI, 357-360).
— Teoremi di aritmetica (VII, 24-27).
— Sulle somme dei divisori dei numeri (VII, 112-116).
— Su talune serie ed applicazioni all'aritmetica (VII, 257-312).

Serra: Sul cerchio che taglia armonicamente tre segmenti dati (II, 127-128).

Siacci: Intorno ad una serie ed a una funzione dei coefficienti binomiali (X, 349-359).

Stammer: De la plus courte distance entre deux droites dans l'espace, et d'un cas particulier d'une fonction de deux variables indépendentes, dont le rapport a une limite déterminée (V, 236-239).
— Recherches sur les surfaces de second degré, qui se coupent suivant deux courbes planes, ou qui sont enveloppées par deux cônes communs (VI, 153-165).

Studnicka: Intorno al calcolo delle operazioni (X, 76-78).

Tano: Sopra due serie di Gauss ed Heine (IX, 60-63).
— Un teorema di geometria (IX 151).

Tardy: Sulle derivate d'ordine superiore delle funzioni composte (II, 73-77).
— Sopra alcune formule relative ai coefficienti binomiali (III, 1-3).

Tognoli: Sopra una estenzione di proprietà spettanti a curve algebriche piane di un ordine qualunque alle superficie algebriche di qualunque grado (VIII, 166-170).
— Intorno ad alcune quistioni generali sulla teorica dei complessi risolute col metodo geometrico puro (IX, 19-31).
— Osservazioni geometriche (IX, 68-75).
— Sul numero delle superficie d'una rete che hanno un contatto tripunto con la curva d'intersezione di due superficie algebriche (IX, 188-192).
— Dimostrazione d'un teorema di geometria (IX, 366-370).
— Sulla corrispondenza multipla fra due spazii a tre dimensioni (X, 1-15, 141-146).
— Corrispondenza (X, 117-118).

Torelli: Teorema sui determinanti a due scale (IV, 294-296).
— Sulle funzioni simmetriche complete (V, 110-120).
— Sopra una divisibilità (V, 250-253).
— Il teorema di Viviani sulla Pseudosfera (X, 128-129).
— Sopra alcune serie (X, 129-132).

Trudi: Esposizione di diversi sistemi di coordinate omogenee (I, 11-25, 47-59, 148-158).
— Nota intorno ad una proprietà del cerchio di 9 punti (I, 29-32).
— Una dimostrazione del teorema di Sturm (I, 59 63).
— Sui teoremi di Poncelet relativi ai poligoni iscritti e circoscritti alle coniche (I, 81-90, 125-126).
— Sul criterio degli equimulteplici, adoperato dagli antichi geometri nella teorica delle proporzioni (I, 337-340).
— Sul processo del massimo comun divisore fra due funzioni intere di una variabile (II, 21-28).

— Intorno a un determinante più generale di quello delle radici delle equazioni, ed alle loro funzioni omogenee complete (II, 152-158, 180-186).

— Sulla decomposizione delle funzioni fratte razionali (II, 225-242, 257-263).

— Sullo sviluppo delle funzioni fratte razionali (V, 1-20, 93-105, 257-272, 337-350).

— Sulla determinazione delle costanti arbitrarie negli integrali delle equazioni lineari così differenziali che a differenze finite (VII, 76-97).

— Intorno alle equazioni binomie (X, 241-278).

Turazza: Di un nuovo teorema relativo alla rotazione d' un corpo attorno ad un asse (III, 146-149).

Uglieni: I principii della prospettiva lineare secondo Taylor (III, 338-343).

Valeriani: Del piano, sua definizione. Assioma del piano elevato a teorema (VII, 376).

— Sistema generale di n equazioni lineari fra n incognite (IX, 371-376).

Vecchio: Sulle equazioni trascendenti (VI, 42; X, 171-172).

— Sulle proporzioni e progressioni (VI, 43-49).

— Alcune osservazioni su una pagina dell'Hirn (X, 172-174).

Weyr (*Em*): Sulle curve piane razionali del 3° ordine (IX, 145-147).

— Intorno alle curve gobbe razionali (IX, 217-222).

— Alcuni teoremi intorno alla *Focale a n eud* (IX, 259-261).

— Intorno alle involuzioni di grado qualunque (X, 165-169).

Wilson: Euclide come testo di geometria elementare (VI, 361-368).

Zannotti: Lezioni sulla termodinamia (VII, 160-173, 351-368; VIII, 60-83).

Zinna: Sulla separazione delle radici delle equazioni numeriche (VI, 344-356).

TOMI XI-XX (1873-1882).

Affolter: Dimostrazione elementare della proprietà che due triangoli polari rispetto ad un circolo sono in posizione prospettiva (XI, 110-111).

Albeggiani: Sviluppo di un determinante ad elementi polinomii (XIII, 1-32).

— Dimostrazione d'una formola d'analisi di F. Lucas (XIII, 107-112).

Amanzio: Risoluzione dell'equazione di 3° grado (XII, 89-92).

— Alcune proprietà delle curve di 3° e 4° ordine (XIV, 48-53).

— Risoluzione per serie delle equazioni quadrinomie della forma: $Ax^{2m+n} + Bx^{m+n} + Cx^n + D = 0$ (XIV, 153-179, 306-317).

— Sopra alcune formule (XV, 257-267).

Amodeo: Teorema di geometria proiettiva (XVIII, 15-16).

Amoroso: Un teorema di meccanica (XIX, 380-384).

Anelli: Sopra le curve piane del 3° ordine con un punto doppio (XVI, 364-376).

Angelitti: Sull'attrazione secondo una potenza intera qualunque della distanza (XX, 346-368).

Anonimo: Sul cambiamento dei piani coordinati nel metodo delle proiezioni axonometriche (XII, 154-160).

Armenante: Sulle curve gobbe razionali del 4° ordine (XI, 221-232; XII, 250-265).

Arzelà: Sviluppo in serie ordinate secondo le potenze decrescenti della variabile di n

funzioni algebriche definite da altrettante equazioni a coefficienti determinati (XI, 368-375).

— Deformazione d'un ellissoide omogeneo elastico isotropo (XII, 339-347).

— Sopra la teoria dell'eliminazione algebrica (XV, 62-85, 154-177).

Aschieri: Sui sistemi di rette nello spazio (XI, 107-109, 246-249, 340-348; XII, 15-21).

— Sopra una superficie gobba dell' 8° grado e di genere zero (XII, 129-135).

— Di alcune forme in spazii a sei dimensioni (XII, 368-374).

— Sopra una corrispondenza di rette fra loro, e di punti fra loro (XIII, 328-336).

— Nozioni preliminari per la geometria proiettiva dello spazio rigato (XVI, 346-363).

Bardelli: Relazioni metriche e di posizione nel triangolo rettilineo (XIV, 241-262).

Battaglini: Sulla teorica dei momenti d'inerzia (XI, 62-70).

— Sul movimento d'un sistema di forma invariabile (XI, 359-367).

— Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche (XII, 193-200).

— Sui circoli nella geometria non-euclidea (XII, 213-219).

— Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle quadriche (XII, 266-276).

— Sulla geometria proiettiva (XII, 300-311; XIII, 49-71; XIV, 110-138).

— Intorno ad una superficie di 8° ordine (XIII, 155-160).

— Sulla quintica binaria (XIV, 54-65).

— Sull'affinità circolare non euclidea (XVI, 256-262).

— Sui complessi di 2° grado (XVIII, 1-14).

— Sull'equazione differenziale ellittica (XIX, 65-75).

— Sui connessi ternarii di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione semplice (XIX, 316-327).

— Sui connessi ternarii di 1° ordine e di 1ª classe (XX, 230-248).

Beltrami: Sulle funzioni bilineari (XI, 98-106).

Bernardi: Sopra le proprietà generali degli invarianti e dei covarianti di una e di più forme ternarie (XIX, 136-150, 258-293).

Bertini: Sistema simultaneo di due forme biquadratiche binarie (XIV, 1-13).

— Sulle curve razionali per le quali si possono assegnare arbitrariamente i punti multipli (XV, 329-335).

— Sui complessi di 2° grado (XVII, 1-14).

Besso: Sull'integrale $\int F(x)\, lx\, dx$ esteso fra limiti reali e positivi, quando la $F(x)$ sia una funzione razionale (XII, 1-14).

Bianchi: Sulle trasformazioni univoche nel piano e nello spazio (XVI, 263-266).

— Sopra la deformazione d'una classe di superficie (XVI, 267-269).

— Ricerche sulle superficie elicoidali (XVII, 9-39).

— Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano e nello spazio (XVII, 40-42).

— Sulle superficie a curvatura costante positiva (XX, 287-292).

Bonolis: Risoluzione di $2n$ equazioni con $2n$ incognite che si presentano in alcune quistioni di Meccanica applicata alle costruzioni (XI, 38-41).

— Ricerca dei valori delle formole:

$$\sum_{k=0}^{k=k}\left[\binom{k+1}{1}\binom{s-3}{0}+\cdots+\binom{k+1}{k+1}\binom{s-3}{k}\right]$$

e

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}\left[\binom{k+1}{1}\binom{s-3}{0}+\cdots+\binom{k+1}{k+1}\binom{s-3}{k}\right](n-k)$$ (XI, 233-243).

— Alcune formole ricavate da quelle di Newton pel calcolo delle funzioni simmetriche semplici delle radici d'un'equazione (XI, 321-330).

— Sulle progressioni di ordine superiore (XII, 179-192, 231-249).

— Sviluppi di alcuni determinanti (XV, 113-134).

Bustelli: Sul concetto di proporzionalità nell'aritmetica generale (XIII, 82-98).

Caldarera: Sullo sviluppo delle funzioni a variabili piccolissime (XII, 348-367).

Capelli: Dimostrazioni di due proprietà numeriche offerte dalla teoria delle sostituzioni, ed osservazioni sopra le sostituzioni permutabili con una sostituzione data (XIV, 66-74).

— Intorno ai valori di una funzione lineare di più variabili (XIV, 141-145).

— Sopra l'isomorfismo dei gruppi di sostituzioni (XVI, 32-87).

— Sopra un punto della teoria delle forme binarie (XVI, 217-224).

— Sopra la corrispondenza (2,2) ossia la forma $f(x^2, y^2)$ e i suoi invarianti e covarianti relativi a due trasformazioni lineari indipendenti delle variabili (XVII, 69-148).

— Sopra le forme algebriche ternarie a più serie di variabili (XVIII, 17-33).

— Sopra un problema di partizione in relazione alla teoria delle forme algebriche (XIX, 87-115).

— Sul numero dei covarianti di grado dato per forme di qualsivoglia specie (XX, 293-300).

Cassani: Intorno alle ipotesi fondamentali della geometria (XI, 331-339).

— Sopra alcune proprietà delle quadriche (XIV, 146-150).

— Intorno ad un teorema del Sig. E. Lucas (XIV, 347-350).

— Nuove proposte intorno ai fondamenti della geometria (XV, 284-288).

— La quadrica dei dodici punti, e ricerche che le si collegano (XVII, 202-217).

— I nuovi fondamenti della geometria (XX, 143-165).

Cazzaniga: Sulla integrazione delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e di 1° grado, mediante funzioni algebriche (XVIII, 72-91).

— Il calcolo dei simboli d'operazione elementarmente esposto (XX, 48-77, 194-229).

Certo: Lo spazio delle omologie affini di un piano posto in relazione con lo spazio delle coniche dello stesso piano (XX, 321-345).

Chelini: Sopra i sistemi materiali di egual momento d'inerzia (XII, 201-205).

Clebsch: Commemorazione di Giulio Plücker (Traduzione di E. Beltrami) (XI, 153-179).

Crocchi: Sopra gli assi ed i raggi vettori nella ellisse (XII, 375-378).

— Proprietà derivate dalle curve e superficie arguisiane (XII, 378-380).
— Analogie dell'enunciato del Viviani (XIII, 170-174).
— Sopra le coniche polari reciproche nei fasci di coniche (XIV, 83-92).
— Nota di calcolo grafico sopra la risoluzione d'un sistema di due equazioni di 1° grado (XV, 86-88).
— Sopra le funzioni *aleph* e il determinante di Cauchy (XVII, 218-231, 380).
— Una relazione fra le funzioni simmetriche semplici e le funzioni simmetriche complete (XVIII, 377-380).
— Sopra la corrispondenza tra i coefficienti di un'equazione algebrica e le funzioni simmetriche complete (XX, 301-320).

Dainelli: Teoremi sulla somma di tre quadrati interi (XV, 378-380).
— Relazioni fra l'area ed il perimetro, fra il volume e la superficie, fra i momenti, fra le coordinate dei centri di gravità per gli spazii limitati da linee e superficie che hanno l'equidistante della loro stessa natura (XVI, 279-297).
— Sul movimento per una linea qualunque (XVIII, 271-300).
— Sulla decomposizione della forza acceleratrice d'un punto materiale libero che si muove secondo una curva qualunque (XIX, 171-197).

D'Arcais: Sui sistemi di coordinate (XVI, 18-25).

De Berardinis: Sulla livellazione geometrica (XX, 101-142).

Del Re: Relazione tra due determinanti (XIX, 116-117).

De Paolis: Sopra un sistema omaloidico formato da superficie d'ordine *n* con un punto (*n*—1)-plo (XIII, 226-248, 282-297).

De Zolt: Saggio di Pangeometria (XV, 336-361).

Dewulf: Sur les démonstrations de deux théorèmes donnés par M. Cremona dans ses *Éléments de Géométrie Projective* (XIII, 168-169).

Dina: Sopra una curva particolare giacente sopra una superficie in generale (XIX, 298-310).

D'Ovidio: Sulle relazioni metriche in coordinate omogenee (XI, 197-220).
— Sopra alcuni luoghi ed inviluppi di 1° e di 2° grado in Geometria Proiettiva (XIII, 363-379).
— Sulle proiezioni ortogonali nella geometria metrica proiettiva (XIV, 298-305).
— Sopra un teorema fondamentale della teoria degl'invarianti (XV, 187-192).
— Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie (XVII, 310-333).

Fais: Intorno ad alcune formole che si deducono dalla formola di Taylor (XII, 148-149).
— Sulla ricerca dell'equazione dell'inviluppo d'una serie di curve piane (XII, 150-151).
— Sopra una forma compendiata delle equazioni differenziali immediate d'ordine superiore (XII, 320-325).
— Intorno alle derivate d'ordine superiore delle funzioni di funzioni (XIII, 47-48).
— Intorno all'integrazione delle equazioni differenziali totali di 1° ordine e di 1° grado (XIII, 344-351).

— [illegible] ad alcune formole e proprietà delle curve gobbe (XIV, 219-240).

[illegible] Traduzione del Saggio di un'esposizione ed analisi dei lavori scientifici di [illegible] (XI, [illegible]).

[illegible] De [illegible] radicum realium cuiuslibet aequationis numericae unius incognitae (XII, [illegible]).

[illegible] Sulla riforma dell'insegnamento geometrico (Traduz. di G. Torelli) (XVI, [illegible]).

[illegible] Equazioni [illegible] del moto permanente d'un sistema (XV, 268-283).

— [illegible] delle figure che si mantengono simili a sè stesse (XVII, 232-243).

[illegible] Alcune formole [illegible] alla teoria infinitesimale delle superficie (XIII, [illegible]).

— [illegible] sulla teoria delle coordinate curvilinee applicata al calcolo integrale (XI [illegible]).

— [illegible] dei nove punti di Feuerbach, sua generalizzazione nella Geometria non euclidea (XVI, 293-304).

— [illegible] (XVI, 377).

— [illegible] d'un sistema di [illegible] equazioni fra nove quantità (XVIII, 174-177).

[illegible] (XVIII, [illegible]).

[illegible] Sulla [illegible] e sopra una notevole proprietà [illegible] (XI, [illegible]).

— [illegible] dei sistemi di rette nel piano, e [illegible] piano e sulla sfera (XVI, 91-107).

[illegible] (XI, 43-61, 86-[illegible]).

[illegible] Determinanti [illegible] di elementi con un numero qualunque di indici (X, [illegible]).

[illegible] (XI, [illegible]).

[illegible] applicazione ad una maniera di [illegible] (XV, [illegible]).

[illegible] (XI, 25-[illegible]).

[illegible] Del movimento d'un [illegible] che ne trae costantemente un'altra fissa (XX, [illegible]).

[illegible] d'un punto materiale isolato (XVI, 177-197).

[illegible] (XVII, 373-380).

[illegible] (XVIII, 308-316).

[illegible] (XVIII, 159-173).

[illegible] (XVII, [illegible]).

[illegible] analitica delle sostituzioni sopra un [illegible] (XX, [illegible]).

[illegible] delle parallele mediante considerazioni [illegible] (Traduzione di A. Sparagna) (XIX, [illegible]).

[illegible] le funzioni continue periodiche (Traduzione di G. [illegible]) (XVI, [illegible]).

[illegible] tipico, [illegible], composto di strati

di densità costante che cresce verso il centro, e rotante intorno all'asse di rotazione, sotto l'influenza d'un corpo che gira intorno al centro dell'ellissoide secondo la legge di Keplero (XVII, 53-68, 183-201).

Hesse: Ciclo di equazioni fra determinanti (Generalizzazione analitica del Teorema di Pascal) (Traduzione del Dott. Valeriano Valeriani) (XI, 309-317).

Hoüel: Remarques sur l'enseignement de la trigonométrie (XIII, 72-79).

Intrigila: Dimostrazione d'un teorema di Faure (*Vedi* Laudiero) (XIX, 245-257).

Isè: Sul grado della risultante (XI, 253).

— Nota di Calcolo grafico sulla risoluzione delle equazioni di 1° grado (XIV, 180-189).

Jadanza: Sulla latitudine, longitudine ed azimut dei punti d'una rete trigonometrica (XVIII, 137-158).

Janni G: Esposizione della teorica delle sostituzioni (continuazione) (XI, 1-16, 71-85, 257-300).

— Esposizione della teorica della risoluzione delle equazioni di Galois (XII, 277-299).

— Studii di analisi superiore (XIV, 321-346).

Janni V: Sul prodotto di due matrici (XI, 357-358).

— Sul grado dell'eliminante del sistema di due equazioni (XII, 27).

— Dimostrazioni di alcuni teoremi sui determinanti (XII, 142-145).

— Sulla serie binomiale (XII, 229-230, 312).

— Sul teorema di Sturm (XX, 166-167).

Jung: Intorno alla dimostrazione d'un teorema della *Geometria Projettiva* del prof. Cremona (XIV, 139-140).

Laudiero: Dimostrazione d'un teorema di Faure (XIX, 245-257).

Lemoyne: Sul valore medio geometrico delle funzioni d'una variabile reale (XVI, 209-216).

Levi: Su le coordinate trigonali (XIV, 353-376).

Longchamps (*Gohierre de*): Des fractions étagées (XV, 299-328).

Maggi: Sul moto d'un filo flessibile ed inestensibile che si sposta pochissimo dalla sua posizione d'equilibrio (XIX, 1-63).

Maglioli: Sulla teoria delle quadriche omofocali dal punto di vista sintetico (XVI, 305-340).

Maisano: Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica, e degl'invarianti, covarianti e controvarianti di sesto grado (XIX, 198-237).

Marsano: Sul numero delle combinazioni di data classe fatte con una certa moltitudine degli interi successivi ed aventi ciascuna una somma non maggiore d'un limite assegnato (XIX, 156-170, XX, 249-269).

Minozzi: Sul movimento d'una curva sopra un'altra ad essa uguale (XIV, 190-192).

— Sui centri di gravità (XV, 235-247).

— Sopra un determinante (XVI, 148-151).

Mogni: Sulla proiezione centrale (XIII, 186-197).

Mollame: Una risoluzione dell'equazione completa di 3° grado e le radici di questa in funzione del discriminante della cubica (XVI, 341-344).

Mollo: Sulla diffrazione dei reticoli (XIX, 131-135).
— Sopra un teorema di elettricità statica (XIX, 373-379).
Moreno: Dimostrazione d'un teorema di Eisenstein (XVI, 174-176).
Morera: Sul moto d'un punto attratto da due centri fissi colla legge di Newton (XVIII, 34-71).
Mossa: Sulla derivazione successiva delle funzioni composte (XIII, 175-185).
Mugnaini: Sulla sfera osculatrice all'ellissoide di rivoluzione (XVI, 270-278).
Neumann: Commemorazione di Rodolfo Federico Alfredo Clebsch (Traduzione) (XI, 44-48).
Nicodemi: Intorno ad alcune funzioni più generali delle funzioni iperboliche (XV, 193-234).
Paci: Sui numeri complessi (XI, 244-245).
— Sopra un'applicazione gemetrica della teoria delle funzioni ellittiche (XII, 93-96).
— Sopra alcune applicazioni geometriche delle funzioni ellittiche (XII, 97-109).
— Sopra la funzione potenziale d'una massa distribuita sopra una superficie (XV, 289-298).
Padelletti: Sull'accelerazione normale (XIII, 115-128).
— Sulle accelerazioni d'ordine superiore al primo (XIII, 129-149).
— Sopra una proprietà delle brachistocrome (XIII, 201-203).
— Sulla teoria dei poligoni e delle curve funicolari (XIV, 14-47).
— Sulle relazioni tra cinematica e meccanica (XIV, 193-218, 280-297).
— Sul concetto di coppia in cinematica (XV, 54-61, 101-110, 178-186, 248-256).
— Studii sui diagrammi reciproci (XVII, 339-359).
— Sulla catenaria (XIX, 328-332).
— Principii della teoria dei quaternioni elementarmente esposti (XX, 1-47).
Peano: Formazioni invariantive delle corrispondenze (XX, 79-100).
Pincherle: Sulle superficie d'area minima (XIV, 75-82).
— Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome (XVIII, 92-136).
— Saggio d'una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. C. Weierstrass (XVIII, 178-254, 317-357).
— Sopra una formola d'analisi (XIX, 385-386).
Pittarelli: Osservazioni sulle quadriche in coordinate di piani (XIII, 204-225, 298-322).
— Su di una equazione differenziale di 1° ordine ad un numero qualunque di variabili (XIII, 323-327).
— Note sugli scorrimenti delle forme binarie (XVI, 225-233).
— Sul significato geometrico delle *Ueberschiebungen* nelle forme binarie (XVII, 160-171).
— Intorno ad un problema di eliminazione nella teoria analitica della cubica gobba (XVII, 244-259).
— La cubica gobba e le forme binarie quadratiche e cubiche (XVII, 260-309).
Piuma: Intorno all'equazione $X^2 + Y^2 = Z^2$ (XIX, 311-315).
Pucci: Sulle proiezioni geografiche (XVIII, 358-368).
— Sulla teoria delle basi geodetiche (XIX, 151-155).

Retali: Sulle progressioni geometriche d'ordine superiore (XI, 349-356).

— Sui centri di gravità di alcune curve piane (XII, 326-337).

Riccardi: Nota bibliografica (XVI, 378-389).

Ricci: Sopra un sistema di due equazioni differenziali lineari, di cui l'una è quella dei fattori integranti dell'altra (XV, 135-153).

Ricordi: I circoli nella Geometria non euclidea (XVIII, 255-270).

Rubini: Formole di trasformazione nella teorica dei determinanti (XVI, 198-208, 344).

— Intorno ad un punto di storia matematica (XVII, 149-159).

Ruiz de Cardenas: Intorno all'epicicloide sferica (XII, 313-319).

Ryew Lyme: Sulle linee di curvatura delle superficie di 2° ordine (XI, 111-112).

Sardi: Sulle progressioni per differenze (XI, 123-152).

Tirelli: Alcune proprietà dei coefficienti binomiali (XIV, 318-320).

Tognoli: Alcune considerazioni sulla geometria delle superficie e curve gobbe di genere zero (XI, 180-191).

— Ricerca dell'equazione dell'inviluppante d'una serie di curve piane (XI, 376-377).

— Sopra un modo di generazione delle curve piane di 3° ordine (XI, 378-380).

— Due teoremi sulla generazione delle curve razionali (XII, 136-141).

— Sulla generazione delle curve razionali d'ordine pari, mediante serie proiettive di cerchi e sfere (XII, 161-167).

— Sulle curve gobbe razionali (XII, 220-228).

— Sui sistemi di curve piane (XIII, 359-362).

— Rappresentazione piana d'una classe di superficie algebriche dotate d'una curva multipla (XIV, 263-279, 378-380).

— Sulla teoria della involuzione (XX, 270-286).

Torelli: Di alcuni integrali formati dagli integrali ellittici, e di qualche loro applicazione (XI, 17-37).

— Intorno agli integrali ellittici considerati come funzioni del modulo (XII, 168-175).

— Nozioni storiche, relative alla teoria delle trasformazioni in Geometria Descrittiva (XIII, 352-355).

— Sopra alcune proprietà numeriche (XVI, 152-167).

Trudi: Teoria delle funzioni isobariche (XII, 110-128).

Valeriani: Nuova dimostrazione di una importante formola algebrica (XII, 208-212).

— Ogni equazione di grado n ha n radici (XIII, 33-46).

— Soluzione analitica delle equazioni biquadratiche complete (XIII, 99-106).

— Alcune notevoli applicazioni della induzione matematica (XV, 34-53).

Vecchio: Sugl'inviluppi (XI, 318-320).

Veronese: Teoremi e costruzioni di Geometria proiettiva (XVII, 172-182).

Viaggi: Sulle equazioni a radici equidifferenti (XV, 376-377).

Volterra: Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue (XIX, 76-86).

— Sui principii del calcolo integrale (XIX, 333-372).

Zanotti: Sopra due passi della *Storia della teoria matematica delle probabilità* del sig. Todhunter (XVI, 26-30).

— Sopra un problema di probabilità (XVI, 169-173).

Tidsskrift for Mathematik.

Udgivet af J. P. Gram og H. G. Zeuthen. — Kjöbenhavn.

V. RÆKKE. — I. AARGANG (1883):

Cavallin: Härledning af ett par närmevärden på ellipsens omkrets (33-37).
Charlier: Från fysisk-matematiska föreningen. II. (177-183).
Christensen: Beviser for nogle sätninger af Keglesnitslären (14-17.
— Om den historiske Udvikling af Theorien for Fladers og Rumkurvers Krumning (97-127).
Gram: Om Kvadratur af Fejlkurver (65-72).
— Ludvig Henrik Ferdinand Oppermann (137-144).
Meyer (*Ad.*): Från fysisk-matematiska föreningen i Upsala. I. (73-78).
Oppermann: Bevis for en Sätning om Kjädebrökers Konvergens (163-164).
Petersen: Om mathematikens grundbegreber. Bevis for sätningen om trekantens vinkelsum (3-11).
Sebelien: En grafisk Fremstilling af Forsögsräkker (186-188).
Steen: Om homogene differentialligninger af anden orden (11-14).
Thiele: Märkelige Interpolationsresultater (183-185).
Zeuthen: Om polyteknisk Läreanstalts Kursus for Ingeniörer i Mathematik og deskriptiv Geometri (37-49).
— Et elementärt bevis for Pascals Sätning (78-81).
— Fra Mathematikens Historie (145-156).
— Om Sammensätning af et Punkts Hastigheder (156-162).

V. RÆKKE. — II. AARGANG (1884):

Bang: Relationer mellem Siderne i en Trekant, hvis Vinkler tilfredsstille den lineäre Relation $\alpha A + \beta B + \gamma C = n R$ (53-59).
Buchwald: Om den nöjagtigste endelige Räkkeudvikling efter Potenser af den uafhängige variable med positive hele Potensexponenter (33-52).
Cavallin: Om ett teorem af Crofton (1-8).
— En Generalisation af Legendre's formel för beräkning af en sluten konvex kurvas omkrets (147-149).
Crone: Nogle Konstruktioner henhörende til Projektionslären (13-19).
Gram: Om Udjevning af Dödelighedsiagttagelser og Oppermann's Dödeligheds-formel (113-139).
— En numerisk Funktion (170-181).
Guldberg: Kvotient-og Produkt-Regning I, II, (84-96, 161-170).
Jensen (*J. L. W. V.*): Om Räkkers Konvergens (63-72).
— Om en Sätning af Cauchy (81-84).
Lindhagen: Om det ballistiska problemet (149-151).
Petersen: Om en Transformation i Mekaniken (183-186).
Schmidt: Om Reduktion af Störrelsen $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}$ til en Sum af to Kvadratrödder (154-156).

Steen: En diskontinuert Kurve (9-10).
— Maximus Planudes's Problemer (139-146).
Thiele: Geometrisk Anskueliggjörelse af Tredjegrads-Ligningens Lösning (11-13).
— Arkhimedes og $\sqrt{3}$ (151-154).
Thue: En Generalisation af den Brianchon'ske Sätning (181-183).
Zeuthen: Anden Konstruktion af Dobbeltpunkterne i Projektionen af to Keglesnitsflader Skjäringskurve (60-63).

V. RÆKKE. — III. AARGANG (1885):

Arneberg: Integration af en Differentialligning (168-175).
Buchwaldt: Om Potenser af uendelige og endelige Räkker og om Räkker for omvendte Funktioner (65-101).
Christensen: Et Bevis hos Archimedes (47-50).
— Indförelsen af Decimalbröker i Danmark (149-152).
Crone: Om Eulers Sätning om Polyedre (44-47).
Guldberg: Om Ligninger, hvis Rödder kunne fremstilles ved et med Cardans Formel analogt Udtryk (39-44).
Haase: Elementare Beweise der Sätze von Brianchon und Pascal (23-29).
Jensen (*J. L. W. V.*): Om Gränsevärdi og irrationale Tal (33-39).
Olsson: Från fysisk-matematiska föreningen i Upsala. III (161-168).
Petersen: Om Algebraens Grundprinciper (1-22).
— En Modbemärkning (152-153).
Steen: Et Bevis for Newtons Sätninger om symmetriske Funktioner af en Lignings Rödder (30-31).
Thue: Et Theorem om netformige Figurer (102-105).
— En Dualisme i den absolute Geometri (129-146).
Valentiner: En Bemärkning om Antallet af Spidser paa en Kurve af Ordenen *n* og Slägten *p* (179-180).
Zeuthen: En Udledelse af Duhamels Konvergensbetingelse (147-149).
— Nogle Bestemmelser af Pyramidens Volumen (175-179).

V. RÆKKE. — IV. AARGANG (1886):

Bang: Taltheoretiske Undersögelser (70-80, 130-137).
Birkeland: Antallet af fri Bevägelser i et leddet Stangsystem (174-176).
Fleischer: En Flade, fra hvilken Straaler udgaaende fra et fast Punkt tilbagekastes parallelt med en given Plan og gjennem en given Linie vinkelret paa denne (164-168).
Foldberg: Et Theorem om den homogene lineäre Differentialligning af 2den Orden (81-82).
Gram: Om Logarithmer og Antilogarithmer (1-15).
Guldberg: Om Tverödder (97-120).
Hertzsprung: Nogle Bemärkninger om en Klasse kombinatoriske Opgaver (154-163).
Jensen (*J. L. W. V.*): Om Raabe og Duhamels Konvergensbetingelse (15-16).

Juel: Om Keglesnitskorder, der fra et fast Punkt ses under ret Vinkel (33-43).
Olsson: Några geometriska Satser (120-128).
Zeuthen: Adolph Steen (65-70).
— En Udledelse af Betingelsen for, at en Flade af anden Orden er udfoldelig (128-130).
— Om Momentsätningen i Statiken (145-154).
— Om den mathematiske Behandling af Gnidningsmodstanden (168-174).

V. RÆKKE. — V. AARGANG (1887):

Bang: Nogle Maximumsproblemer i den ikke-euklidiske Geometri (136-141).
— Lösning af nogle Konstruktionsopgaver (153-155).
Birkeland: En Generalisation af Sylvesters skjäve Pantograf (17-18).
Buchwald: Interpolation og Integration ved Räkker (79-90, 97-121).
Christensen: Den förste Bestemmelse af en krum Linies Längde (121-125).
Gram: Om Transformationer af den binome Ligning (44-50).
Hansen: Gräffes Oplösning af numeriske Ligninger (169-187).
Hertzsprung: En Kombinationsopgave (13-17).
Hjort: Hans Carl Frederik Christian Schjellerup (148-153).
Jensen (J. L. W. V.): En Funktionalligning (90-93).
Juel: Om Samlingen af de Linier, hvoraf en given Kugle afskjärer Korder, som ses under ret Vinkel fra et givet Punkt (141-148).
— Om Argands Bevis for Algebraens Fundamentalsätning (161-169).
Madsen: Om Räkkeudviklinger af en algebraisk Lignings Rödder (129-136).
Meyer (A): Billeddannelse i Kuglespejle og Linser (1-8).
Olsson: Härledning af additionsteoremen för några elliptiska integraler (33-44).
Zeuthen: Om algebraiske Kurvers Bestemmelse ved Punkter (65-79).

Transactions of the Cambridge Philosophical Society.

VOLUME XIV. PART III. (1889):

Hobson: On a class of Spherical Harmonics of complex degree vith application to physical problems (211-236).
Newman: Table of the Exponential Function e^x to twelve places of Decimals(237-249).
Chree: The Equations of an Isotropic Elastic Solid in Polar and Cylindrical Co-ordinates, their Solution and Application (250-369).
Liveing: On Solution and Crystallization (370-407).

Bulletin de la Société Philomatique de Paris.

[*Vedi* t. II, pag. 22].

SEPTIÈME SÉRIE.—TOME XII (1887-1888): Nos 1-4 (*Fin de la 7ème série*).

Mémoires publiés par la Société Philomatique à l'occasion du centenaire de sa fondation (1788-1888).

Un volume in-4° de 437 pages, accompagné de nombreuses figures dans le texte et de 24 planches.
Paris, Gauthier-Villars, 1888.

(Sciences Mathématiques et Physiques)

André (*Désiré*) : Étude sur les permutations de deux espèces de lettres (35-43).
Berthelot : Notice sur les origines et sur l'histoire de la Société Philomatique (I-XVII).
Bertrand : Sur l'application du calcul des probabilités à la théorie des jugements (69-75).
Fouret : Sur la détermination de l'ordre de la surface lieu des points dont les distances à des surfaces algébriques données vérifient une relation algébrique donnée (77-83).
Haton de la Goupillière : Transformation propre à conserver le caractère du potentiel cylindrique d'un nombre limité de points (27-33).
Laisant : Constructions graphiques de nombres transcendants (63-67).
Laussedat : Mémoire sur la méthode graphique des projections appliquée à la construction des cartes des éclipses de soleil, en général (1-25).
Léauté : Sur un moyen d'obtenir un diagramme de détente d'une forme donnée dans les machines de genre Corliss à admission et échappement indépendants (43-50).
Mannheim : Développements de Géométrie cinématique (51-62).
Moutier : Sur les courants interrompus (97-104).

Bulletin de la Société Mathématique de France.

[*Vedi* t. II, p. 67].

TOME XVI (1888). — Nos 5 et 6 (dernier):

Catalan : Propositions et questions diverses (*suite et fin*) (129).
Fabry : Réductibilité des équations différentielles linéaires (135-142).
Jamet : Sur le genre des courbes planes triangulaires (132-135).
Laisant : Remarques arithmétiques sur les nombres composés (150-155).
— Note sur un système de deux courbes planes (172-175).
— Sur la numération factorielle, application aux permutations (176-183).
Lemoine : Des systèmes des coordonnées qui déterminent le plus simplement un point par une construction (162-172).
Ocagne (*d'*) : Sur les systèmes de péninvariants principaux d'une forme binaire (183-187).
Presle (*de*) : Au sujet du développement de cot z en série de fractions (143-144).
— Dérivées successives d'une puissance entière d'une fonction d'une variable, dérivées successives d'une fonction de fonction et application à la détermination des nombres de Bernoulli (157-162).
Réveille : Note sur un théorème de Géométrie cinématique (130-132).
Rouché : Observations en réponse à une Note de M. Delannoy (149-150).
Weill : Sur une propriété des systèmes de courbes algébriques (155-156).
Williot : Note sur le procédé le plus simple de calcul des nombres de Bernoulli (144-149).

Bulletin des Sciences Mathématiques.

[*Vedi* t. II, pag. 63-64].

IIe Série. — Tome XII (1888).

AOUT :

Comptes rendus et analyses.

Huygens (Christian). — Œuvres complètes, publiées par la *Société hollandaise des Sciences*. (*J. Bertrand*). (181-192).

Muller (F.). — Kalender Karten für die Jahre 1800-1999. (192).

Hormann (G.). — Untersuchung zwischen welchen Unduloide und Nodoide die von zwei festen Parallelkreisflächen begrenzt sind bei gegebenem Volumen ein Minimum der Oberfläche besitzen. (*J. T.*). (192-194).

Markoff (A.). — Table des valeurs de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$. (*J. T.*) (194-195).

Mélanges.

Méray : Sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants (196-204).

Revue des publications mathématiques (117-140).

SEPTEMBRE :

Comptes rendus et analyses.

Lagrange. — Œuvres, publiées par les soins de M. A. Serret, sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. Tome XIII : Correspondance de Lagrange avec d'Alembert. (*J. Bertrand*). (205-221).

Mélanges.

Stieltjes : Sur l'équation d'Euler (222-227).

Bagnera : Sur une propriété des séries simplement convergentes (227-228).

Revue des publications mathématiques (141-156).

OCTOBRE :

Comptes rendus et analyses.

Mathieu. — Théorie de l'Électrodynamique (*P. Duhem*). (229-241).

Basset. — A Treatise on Hydrodynamics, with numerous examples. (*M. B.*). (241-245).

Villié. — Traité de Cinématique à l'usage des candidats à la lincence et à l'agrégation (*J. T.*). (245-246).

Mélanges.

Weyr (*Éd.*) : Remarque sur la décomposition des fonctions doublement périodiques en éléments simples (246-248).

Méray : Sur l'impossibilité de franchir par la formule de Taylor les cercles de convergence de certaines séries entières (248-252).

Revue des publications mathématiques (157-172).

NOVEMBRE :

Comptes rendus et analyses.

HALPHEN. — Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. Deuxième partie. (*J. T.*). (253-261).

PEANO (G.). — Calcolo geometrico secondo l' « Ausdehnungslehre di H. Grassmann », preceduto dalle operazioni della logica deduttiva (*J. T.*). (261-262).

Mélanges.

Ptaszycki: Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite (262-270).

Cesàro: Tableau des dérivations cristallographiques dans le premier système (270-272).

Teixeira: Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite (272-276).

Revue des publications mathématiques (173-188).

DÉCEMBRE :

Comptes rendus et analyses.

P. DE LAFITTE. — Essai d'une Théorie rationnelle des Sociétés de secours mutuels. (277-280).

STURM (CH.). — Cours d'analyse à l'École Polytechnique; neuvième édition. (*J. T.*). (280-281).

LÉVY (MAURICE). — La statique graphique et ses applications aux constructions. (*G. K.*). (281-283).

WEISSENBORN (H.). — Gerbert, Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters. (*Paul Tannery*). (283-288).

Mélanges.

Teixeira: Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite (288-290).

Bioche: Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement les génératrices d'une surface réglée (290-292).

Revue des publications mathématiques (189-208).

Nouvelles Annales de Mathématiques.

[*Vedi* t. II, pag. 65-67].

III[e] SÉRIE. — TOME VII (1888).

OCTOBRE—NOVEMBRE—DÉCEMBRE :

Ocagne (d'): Solution de la question de mathématiques élementaires proposée au concours général de 1887 (449-456).

Marchand: Développement de l'accroissement d'un polynôme entier suivant les puissances des accroissement des variables (456-461).

Joffroy: Nouveau théorème relatif aux circonférences tangentes (461-464).

Cesàro: Calcul de sous-invariants (464-467).

Dolbnia: Sur le critère de Galois concernant la résolubilité des équations algébriques par radicaux (467-485).

Pirondini: Sur les surfaces de révolution (486-502).

Sarrau: Notions sur la théorie de l'élasticité (503-552).

Zeitschrift für Mathematik und Physik.

[*Vedi* t. II, pag. 64-65].

33. JAHRGANG. — V. HEFT (5. October 1888):

Weiler: Die Axonometrie als Orthogonalprojection (257-269).

Richter: Ueber die galvanische Induction in einem körperlichen Leiter (270-291).

Hess: Ueber das Jacobi'sche Theorem von der Ersetzbarkeit einer Lagrange'schen Rotation durch zwei Poinsot'sche Rotationen (292-305).

Kleinere Mittheilungen.

Matthiessen: Bemerkungen zu Schmid's Mittheilung « Ueber das Gesetz der Veränderlichkeit der Schwere etc. », S. 188 dieses Band (306-307).

Sporer: Ueber rechtwinklige und gleichseitige Dreiecke, welche einem Kegelschnitt einbeschrieben sind (307-311).

Saalschütz: Das elliptische Integral erster Gattung mit complexem Modul (311-313).

Heymann: Note ueber das elliptische Integral mit complexem Modul (313-314).

Braun: Ueber die Coefficienten der Kugelfunctionen einer Veränderlichen (314-316).

Lohnstein: Ueber das « harmonisch-geometrische Mittel » (316-318).

Puluj: Ein Interferenzversuch mit zwei schwingenden Saiten (318-319).

Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Heiberg: Kleine Anecdota zur byzantinischen Mathematik (161-170).

Recensionen.

WIENER. — Lehrbuch der darstellenden Geometrie. (*Rodenberg*). (171-180).

BURMESTER. — Lehrbuch der Kinematik. (*Mehmke*). (181-188).

MANITIUS. — Des Hypsikles Schrift Anaphorikos. (*Cantor*). (188-189).

HEIBERG et MENGE. — Euclidis opera omnia. (*Cantor*). (189-191).

MARIE. — Histoire des sciences mathématiques et physiques. (*Cantor*). (191-192).

SCHUMANN. — Professor Dr. Joh. Friedr. Wilh. Gronau. (*Cantor*). (192).

FAVARO. — Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei. (*Cantor*). (192-193).

GRUBE. — Zur Geschichte des Problems der Anziehung der Ellipsoide. II. Theil (Laplace und Legendre). (*Cantor*). (193-194).

LORIA. — Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. (*Cantor*). (194-195).

LAGRANGE-SERVUS. — Analytische Mechanik. (*Cantor*). (195-196).

VANDERMONDE. — Abhandlungen aus der reinen Mathematik. (*Cantor*). (196-197).

Gauss-Simon. — Allgemeine Untersuchungen ueber die unendliche Reihe

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$ (*Cantor*). (197).

Steadman Aldis. — A Textbook of Algebra. (*Cantor*). (197-198).

Bibliographie vom 1. August bis 15. September 1888 (199-200).

33. Jahrgang. — VI. Heft (20. November 1888):

August: Ueber die Bewegung von Ketten in Curven (321-336).
Burmester: Kinematische Flächenerzeugung vermittelst cylindrischer Rollung (337-348).
Kleiber: Construction einer Plücker'schen Complexfläche aus ihren vier singulären Strahlen (349-356).

Kleinere Mittheilungen.

Loria: Zur Eliminationstheorie (357-358).
Vivanti: Ueber eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten (358-360).
Bermann: Ueber den mittleren Abstand eines Planeten von der Sonne (361-362).
Saalschütz: Weitere Bemerkungen ueber die Gammafunctionen mit negativen Argumenten (362-372).
Ulbricht: Die Widerstandsgleichung einer Potential-Niveaufläche (372-373).
Schroeter: Ein Satz ueber das dem Kegelschnitt umschriebene Siebeneck (374-375).
Hofmann: Notiz ueber zwei Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (375-381).
Hofmann: Parameterdarstellung von orthogonalen Substitutionen, welche identisch umkehrbar sind, auf geometrischem Wege (381-384).

Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Recensionen.

Mansion. — Résumé du Cours d'Analyse infinitésimal. (*Cantor*). (211-213).
Teixeira. — Curso de Analyse infinitesimal. (*Cantor*). (213-215).
Schotten. — Ueber Fusspunktscurven. (*Cantor*). (215).
Brunn. — Ueber Ovale und Eiflächen. (*Cantor*). (216).
Baer. — Parabolische Koordinaten in der Ebene und im Raume. (*Cantor*). (216-217).
Lolling. — Die Quadratur des Zirkels. (*Cantor*). (217-218).
Kerschbaum. — Beweis, dass es eine Quadratur des Kreises giebt etc. (*Cantor*). (217-218).
Samuda. — Die Quadratur der Hyperbel. (*Cantor*). (217-218).

Bibliographie vom 16. September bis 31. October 1888 (222-223).

Mathematisches Abhandlungsregister. 1887. Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December (224-240).

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

VI° ELENCO : ottobre 1888 - giugno 1889.

[*Vedi* gli Elenchi precedenti : t. I, p. 29-44, 94-118; t. II, p. 5-19, 49-56, 57-62].

Albeggiani, G. (Palermo). [*Vedi* t. II, p. 5]. Linee geodetiche tracciate sopra talune superficie. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Amodeo, F. (Napoli). [*Vedi* t. II, p. 57]. Fasci di omografie binarie e rappresentazione geometrica degli elementi immaginarii. *Giorn. di Battaglini*, XXVI, 1888.

Sugli elementi uniti reali delle omografie ternarie. *Ibid.*, XXVII, 1888.

Bardelli, G. (Milano). [*Vedi* t. II, p. 49]. Baricentri e momenti d'inerzia di superficie e di solidi di rotazione. *Rend. Istit. Lombardo*, $XXII_2$, 23 maggio 1889.

Battaglini, G. (Napoli). [*Vedi* t. I, p. 95]. Sui punti sestatici di una curva qualunque. Nota. I *Rend. Acc. Lincei*, 21 ottobre 1888.

Beltrami, E. (Pavia). [*Vedi* t. II, p. 5]. Considerazioni idrodinamiche. *Rend. Istit. Lombardo*, $XXII_2$, 1889.

Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky. *Rend. Acc. Lincei*, V, 1° sem., 17 marzo 1889.

Note fisico-matematiche (Lettera al prof. Ernesto Cesàro). *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Bertini, E. (Pavia). [*Vedi* t. II, p. 49]. Sulle curve fondamentali dei sistemi lineari di curve piane algebriche. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Berzolari, L. (Pavia). [*Vedi* t. II, p. 6]. Ricerche sulle trasformazioni piane, univoche, involutorie, e loro applicazione alla determinazione delle involuzioni di quinta classe. *Ann. di Matem.*, XVI_2, 1888.

Un nuovo teorema sulle involuzioni piane. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Casorati, F. (Pavia). [*Vedi* t. II, p. 50]. Sugli asintoti delle linee piane algebriche. (Da una Lettera a G. B. Guccia). *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Nuova definizione della curvatura delle superficie e suo confronto con quella di Gauss. *Rend. Istit. Lombardo*, $XXII_2$, 1889.

Capelli, A. (Napoli). [*Vedi* t. II, p. 57]. Sopra certi sviluppi di determinanti. *Rend. Acc. Napoli*, 9 marzo 1889.

Castelnuovo, G. (Torino). [*Vedi* t. II, p. 51]. Geometria sulle curve ellittiche. *Atti Acc. Torino*, XXIV, 18 novembre 1888.

Ricerche di geometria sulle curve algebriche. *Ibid.*, XXIX, 10 febbrajo 1889.

Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Del Pezzo, P. (Napoli). [*Vedi* t. II, p. 51]. Equazione di una curva piana del quinto ordine dotata di cinque cuspidi. *Rend. Acc. Napoli*, 2 febbrajo 1889.

Del Re, A. (Napoli). [*Vedi* t. II, p. 57]. Sui sistemi polari reali bitangenti a sistemi polari reali dati. *Rend. Acc. Napoli*, settembre 1888.

Un teorema nella geometria di una certa classe di corrispondenze. *Giorn. di Battaglini*, XXVI, 1888.

D'Ovidio, E. (Torino). [*Vedi* t. II, p. 58]. Nuova dimostrazione d'una formola di Abel. *Giorn. di Battaglini*, VI, 1868.

Nuova esposizione della teoria generale delle curve di 2° ordine in coordinate trilineari. *Ibid.*, VI, VII; 1868, 1869.

Nota su' punti piani e rette in coordinate omogenee. *Ibid.*, VIII, 1870.

Alcune relazioni fra le mutue distanze di più punti. *Ibid.*, IX, 1871.

Sulle linee e superficie di 2° ordine, rispetto a cui due date linee o superficie di 2° ordine sono polari reciproche. *Ibid.*, X, 1872.

Sulle curve del terz'ordine circoscritte a un quadrilatero completo. *Ibid.*, X, 1872.

Sulle relazioni metriche in coordinate omogenee. *Ibid.*, XI, 1873.

Sopra un teorema fondamentale della teoria degli invarianti. *Ibid.*, XV, 1877.

Sopra alcuni luoghi ed inviluppi di 1° e 2° grado in geometria proiettiva. *Rend. Acc. Napoli*, luglio 1875.

Le proiezioni ortogonali nella geometria metrico-proiettiva. *Atti Acc. Torino*, XI, 1876.

Alcune proprietà metriche dei complessi e delle congruenze lineari in geometria projettiva. *Atti Acc. Lincei*, III_2, 1876.

I complessi e le congruenze lineari nella geometria projettiva. *Ann. di Matem.*, VII_2, 1875.

Sulle reti di complessi lineari nella geometria metrico-proiettiva. *Atti Acc. Lincei*, III_2, 1876.

Nota sui determinanti di determinanti. *Atti Acc. Torino*, XI, 1876.

Addizioni alla Nota sui determinanti di determinanti. *Ibid.*, 25 marzo 1877.

Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante. *Mem. Acc. Lincei*, I, 1877.

Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimensions et de courbure constante. *Math. Annalen*, XII, 1877.

Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie. *Mem. Acc. Torino*, $XXXII_2$, 1879.

Teoremi sui sistemi di superficie di secondo grado. *Atti Acc. Torino* XIV, 1879.

Estensione di alcuni teoremi sulle forme binarie. *Ibid.* XIV, 1879.

Sui covarianti lineari fondamentali di due cubiche binarie. *Ibid.*, XV, 1879.

Sopra due covarianti simultanei di due forme binarie biquadratiche. *Ibid.*, XV, 1879.

Il risultante di due forme binarie biquadratiche espresso mediante i loro invarianti fondamentali. *Ibid.*, XV, 1880.

Nota sulle proprietà fondamentali dei complessi lineari. *Ibid.*, XVI, 1881.

Biografie di Chelini, Tortolini, Bellavitis e Plana. *Mem. Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)*, VI_3, 1887.

Francesco Faà di Bruno. *Annuario della R. Univ. di Torino*, 1888-89.

Dyck, W. (München). [*Vedi* t. II, p. 51]. Beiträge zur Analysis situs—I. Aufsatz. Ein-und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. *Math. Annalen*, XXXII, 1888.

Eneström, G. (Stockholm). [*Vedi* t. II, p. 51]. Bibliographie suédoise de l'histoire des Mathématiques. 1667-1888. *Bibliotheca Mathematica*, 1889.

Sur trois petits traités mathématiques attribués au savant suédois Peder Månsson. *Ibid.*, 1888.

Sur un point de l'histoire du problème des isopérimètres. *Ibid.*, 1888.

Forsyth, A. R. (Cambridge). [*Vedi* t. II, p. 52]. A Class of Functional Invariants. *Proceed. Royal Society*, XLIII, 1888.

Invariants, Covariants, and Quotient-Derivatives associated with Linear Differential Equations. *Philosoph. Transact. Royal Society*, CLXXIX, 1888.

A Class of Functional Invariants. *Ibid.*, CLXXX, 1889.

Fouret, G. (Paris). [*Vedi* t. II, p. 9]. Sur quelques propriétés géométriques des stelloïdes. *Comptes Rendus*, CVI, 30 janvier 1888.

Sur la détermination de l'ordre de la surface lieu des points dont les distances à des surfaces algébriques données vérifient une relation algébrique donnée. *Mémoires publiés par la Société Philomatique à l'occasion du centenaire de sa fondation*, 1888.

Sur quelques problèmes de géométrie descriptive concernant les surfaces gauches du second degré. *Nouv. Annales*, VIII$_3$, janvier 1889.

Sur quelques propriétés involutives des courbes algébriques. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Gerbaldi, F. (Roma). [*Vedi* t. II, p. 10]. Un teorema sull'Hessiana d'una forma binaria. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Sull'Hessiana del prodotto di due forme ternarie. *Ibid.*, III, 1889.

Sulla forma jacobiana di tre forme ternarie. *Giorn. di Battaglini*, XXVII, 1889.

Giudice, F. (Palermo). [*Vedi* t. II, p. 52]. Sulle funzioni iperboliche e circolari *Giorn. di Battaglini*, XXVII, 1889.

Trigonometria rettilinea ad uso delle scuole liceali. Palermo, 1888.

Grimaldi, G. P. (Roma). [*Vedi* t. II, p. 52]. Sopra una corrente galvanica ottenuta col bismuto in un campo magnetico. *Rend. Acc. Lincei*, V, 1° sem., 6 gennajo 1889.

Groth, P. (München): Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. München, 1888.

Guccia, G. B. (Palermo). [*Vedi* t. II, p. 52]. Sur l'intersection de deux courbes algébriques en un point singulier. *Comptes Rendus*, CVII, 22 octobre 1888.

Théorème général concernant les courbes algébriques planes. *Ibid.* CVII, 3 décembre 1888.

Sulla classe e sul numero dei flessi di una curva algebrica dotata di singolarità qualunque. *Rend. Acc. Lincei*, V, 1° sem., 6 gennajo 1889.

Su una proprietà delle superficie algebriche dotate di singolarità qualunque. *Ibid.*, V, 1° sem., 3 marzo 1889.

Sulla intersezione di tre superficie algebriche in un punto singolare e su una que-

stione relativa alle trasformazioni razionali nello spazio. *Ibid.*, V, 1° sem., 17 marzo 1889.

Nuovi teoremi sulle superficie algebriche dotate di singolarità qualunque. *Ibid.*, V, 1° sem., 7 aprile 1889.

Henry, C. (Paris). Cercle chromatique présentant tous les compléments et toutes les harmonies de couleurs, avec une introduction sur la théorie générale du contraste, du rythme et de la mesure. Paris, 1888.

Rapporteur esthétique permettant l'étude et la rectification esthétique de toute forme. Paris, 1888.

Sur la dynamogénie et l'inhibition. *Comptes Rendus,* CVIII, 7 janvier 1889.

Sur un Cercle chromatique, un Rapporteur et un triple décimètre esthétiques. *Ibid.*, CVIII, 28 janvier 1889.

Hölder, O. (Göttingen). [*Vedi* t. II, p. 52]. Bemerkung zur Quaternionentheorie. *Gott. Nachricht.*, N° 2, 1889.

Ueber einen Mittelwerthssatz. *Ibid.*, N° 2, 1889.

Jordan, C. (Paris). [*Vedi* t. II, p. 53]. Sur les transformations d'une forme quadratique en elle-même. *Journ. de Mathématiques*, IV_4, 1888.

Jung, G. (Milano). [*Vedi* t. II, p 12]. Sull'*eccesso* degli elementi fondamentali di un sistema lineare di genere qualunque. *Rend. Istit. Lombardo*, XXI_2, 1888.

Sul numero delle *curve degeneri* contenute in un fascio di genere qualunque. *Ibid.*, XXI_2, 1888.

Ricerche sui sistemi lineari di curve piane algebriche del genere p e sulla loro riduzione all'ordine minimo. Memoria II. *Ann. di Matematica*, XVI_2, 1889.

Klein, F. (Göttingen). [*Vedi* t. II, p. 58]. Formes principales sur les surfaces de Riemann. *Comptes Rendus*, CVIII, 21 janvier 1889.

Des fonctions thêta sur la surface générale de Riemann. *Ibid.*, CVIII, 11 février 1889.

Zur Theorie der Abel'schen Functionen. *Götting. Nachricht.*, 2. März und 12. Mai 1889.

Lebon, E. (Paris). [*Vedi* t. II, p. 58]. Traité de Géométrie descriptive. Premier volume. 2ème édition, revue et modifiée. Paris, 1888.

Solution du problème de Malfatti. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Lemoine, E. (Paris). [*Vedi* t. II, p. 58]. De la mesure de la simplicité dans les constructions mathématiques. *Mathesis*, VIII, 1888.

De la mesure de la simplicité dans les sciences mathématiques. *Assoc. Française, Congrès d'Oran*, 1888.

Notes sur diverses questions de la géométrie du triangle. *Ibid.*, *id*, 1888.

Lindelöf, L. (Helsingfors). Trajectoire d'un corps assujetti à se mouvoir sur la surface de la Terre sous l'influence de la rotation terrestre. *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, XVI, 1887.

Longchamps, G. de (Paris). [*Vedi* t. II, p. 53]. Sur la transformation orthotangentielle dans le plan et dans l'espace. *Bull. de la Société Royale des Sciences de Bohême*, 1888.

Loria, G. (Genova). [*Vedi* t. II, p. 59]. Was sind und was sollen die Zahlen? Von Richard Dedekind — Rivista Bibliografica — *Periodico di Matem. per l'insegn. second.*, III, 1888.

Intorno alle curve razionali d'ordine *n* dello spazio a $n-1$ dimensioni. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Nota su una classe di determinanti. *Giorn. di Battaglini*, XXVI, 1888.

Sulle curve razionali normali in uno spazio a *n* dimensioni. *Ibid.*, XXVI, 1888.

L'opera scientifica di Ettore Caporali. *Ibid.*, XXVII, 1889.

I poligoni di Poncelet. Discorso pronunziato nell' Università di Genova. Torino, 1889.

Lugli A. (Roma). Sul numero dei numeri primi da 1 ad *n*. *Giorn. di Battaglini*, XXVI, 1888.

Maisano, G. (Messina). [*Vedi* t. II, p. 14]. L'Hessiano della sestica binaria e il discriminante della forma dell'ottavo ordine. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Mannheim, A. (Paris). [*Vedi* t. II, p. 54]. Étude d'un déplacement particulier d'une figure de forme invariable par des procédés élémentaires et purement géométriques. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Marcolongo, R. (Roma) [*Vedi* t. II, p. 59]. Sul Teorema di Poisson. *Rend. Acc. Napoli*, settembre 1888.

Teorema di Meccanica. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Sull'accelerazione nel moto di un solido intorno ad un punto fisso. *Giorn. di Battaglini*, XXVII, 1889.

Sulla variazione di un integrale definito e sulla teoria delle equazioni alle derivate del primo ordine. *Rend. Acc. Napoli*, dicembre 1888.

Alcuni teoremi sulle funzioni cilindriche di prima specie. *Ibid.*, aprile 1889.

Marsilly (L.-J.-A. de Commines de) (Auxerre). [*Vedi* t. II, p. 14]. Réfutation de l'interprétation de la géométrie non euclidienne essayée par M. Beltrami. *Assoc. Française, Congrès d'Oran*, 1888.

Mayer, A. (Leipzig). [*Vedi* t. II, p. 54]. Zur Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums. *Bericht. Sächs. Gesellschaft*, 6. Mai 1889.

Mehmke, R. (Darmstadt). Nüns gletavik (fov). I. Teorems nulik dö Kolienat (fov). *Nunel Valemik*, 1888.

Nüns gletavik (New Mathematical Theorems). I. Teorems nulik dö Kolienat. *Ibid.*, 1888.

Nüns gletavik. (favot 2id). II. Teorems nulik do rezipät. *Ibid.* 1889

Nüns gletavik. Läpol al geomet numöl. *Ibid.*, 1889.

Dö ployek liena spadik se pün sembal oma. 1889.

Meissel, E. (Kiel). [*Vedi* t. II, p. 56]. Tafel der Bessel'schen Functionen I_k^0 und I_k^1 von $k=0$ bis $k=15.5$ berechnet. *Abhandl. K. Preuss. Akad. der Wissensch. zu Berlin*, 1888.

Montesano, D. (Bologna). [*Vedi* t. II, p. 60]. Su alcuni gruppi chiusi di trasformazioni involutorie nel piano e nello spazio. *Atti Istit. Veneto*, VI_6, 1888.

Su la trasformazione involutoria dello spazio che determina un complesso tetraedrale. *Rend. Acc. Lincei*, 7 aprile 1889.

Moore, E. H (New Haven). Extensions of certain Theorems of Clifford and of Cayley in the Geometry of *n* Dimensions. *Transact. of the Connecticut Akademy*, VII, 1885.

Algebraic Surfaces of which every Plane-Section is Unicursal in the Light of *n*-Dimensional Geometry. *American Journal of Mathematics*, X, 1887.

A Problem suggested in the Geometry of Nets of Curves and applied to the Theory of Six Points having multiply Perspective Relations. *Ibid.*, X, 1888.

Morera, G. (Genova). [*Vedi* t. II, p. 54]. Intorno all'integrale di Cauchy. *Rend. Istit. Lombardo*, $XXII_2$, 1889.

Sui moti elicoidali dei fluidi. *Rend. Acc. Lincei*, V, 1° sem., 28 aprile 1889.

L'insegnamento delle scienze matematiche nelle Università italiane. Discorso letto nella solenne inaugurazione dell'anno accademico 1888-89 nella R. Università di Genova. Genova, 1889.

Muller, F. (Virginia). Definitive Determination of the Orbit of Comet 1887 IV. *Astronomical Journal*, Nos 174-5, 1883.

Ocagne, M. d' (Cherbourg) [*Vedi* t. II, p. 55]. Quelques propriétés de l'ellipse; déviation, écart normal. *Nouv. Annales*, VII_3 juin 1888.

Détermination du rayon de courbure de la courbe intégrale. *Ibid.*, VII_3, septembre 1888.

Solution de la question de mathématiques élémentaires proposée au concours général de 1887. *Ibid.*, VII_3, octobre 1888.

Note sur les systèmes de péninvariants principaux des formes binaires. *Ann. de la Société scientifique de Bruxelles*, XII° année, 1887-1888.

Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales. *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes*, N° XLVIII, 1888.

Calcul direct des termes d'une réduite de rang quelconque d'une fraction continue périodique. *Comptes Rendus*, CVIII, 11 mars 1889.

Peano, G. (Torino). [*Vedi* t. II, p. 61]. Definizione geometrica delle funzioni ellittiche. *Giorn. di Battaglini*, XXVI, 1888.

Teoremi su massimi e minimi geometrici, e su normali a curve e superficie. *Rend. Circ. Matem.* II, 1888.

Arithmetices Principia nova methodo exposita. Torino, F.lli Bocca, 1889.

Pieri, M. (Torino). Sulle tangenti triple di alcune superficie del sest'ordine. *Atti Acc. Torino.* XXIV, 7 aprile 1889.

Pincherle, S. (Bologna). [*Vedi* t. II, p. 61]. I sistemi ricorrenti di prim'ordine e di secondo grado. *Rend. Acc. Lincei*, V, 1° sem., 6 genn. 1889.

Una trasformazione di serie. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Pittarelli, G. (Roma). [*Vedi* t. II, p. 61]. Sulle curve del terz'ordine con un punto doppio. *Rend. Acc. Napoli*, 9 maggio 1885.

Gli elementi immaginari delle forme binarie cubiche. (Lettera al prof. G. Battaglini). *Giorn. di Battaglini*, XXIII, 1885.

Studio algebrico-geometrico intorno alla corrispondenza (1, 2) Memoria I. *Mem. Acc. Lincei*, III_4, 1886.

Le cubiche con un punto doppio e la corrispondenza (1, 2). Memoria II. *Ibid.*, III_4, 1886.

Sulle forme appartenenti all'ottaedro. (Estratto di Lettera diretta al Socio Brioschi). *Rend. Acc. Lincei*, IV, 1° sem., 6 maggio 1888.

Intorno alla trasformazione del differenziale ellittico effettuata per mezzo della rappresentazione tipica delle forme binarie di 3° e 4° grado. (Estratto di Lettera al Socio Brioschi) *Ibid.*, IV, 1° sem., 3 giugno 1888.

Poincaré, H. (Paris). [*Vedi* t. I, p. 113]. Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique. *Journ. de Mathém*, III_4, 1887.

Sur une propriété des fonctions analytiques. (Extrait d'une Lettre adressée à M. G.-B. Guccia). *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Lecons sur la théorie mathématique de la Lumière, professées pendant le premier semestre 1887-1888, rédigées par J. Blondin licencié ès sciences. Paris, Georges Carré éditeur, 1889.

Reggio, G. Z. (Treviso). Complementi d'Algebra per gli allievi degli Istituti Tecnici (2° Biennio). Torino, Paravia, 1888.

Retali, V. (Como) [*Vedi* t. II, p. 16]. Ricerche sopra l'immaginario in geometria. *Mem. Acc. Bologna*, IX_4, 1888.

Ricci, G. (Padova). Sopra certi sistemi di funzioni. *Rend. Acc. Lincei*, V, 1° sem., 20 gennajo 1889.

Di un punto della teoria delle forme differenziali quadratiche. *Ibid.*, V, 1° sem., 5 maggio 1889.

Ruffini, F. P. (Bologna). [*Vedi* t. II, p. 55]. Di alcune proprietà delle coniche conjugate. *Mem. Acc. Bologna*, IX_4, 1888.

Russo, G. (Catanzaro). Sul Saggio di geometria metrico-projettiva del prof. F. Tirelli. *Corriere Calabrese*, 1889.

Sadun, E. (Roma). [*Vedi* t. II, p. 55]. Condizioni di divisibilità d'un polinomio per un binomio della forma $x^r - a^r$. *Periodico di Matem. per l'insegn. second.* III, 1888.

Schubert, H. (Hamburg). [*Vedi* t. I, p. 114]. Ueber Räume zweiten Grades. *Mitth. d. Hamb. Math. Gesellsch.*, März 1889.

Segre C. (Torino). [*Vedi* t. II, p. 61]. Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques: II. Surfaces réglées. *Math. Annalen*, XXXIV, 1889.

Stieltjes, T.-J. (Toulouse). Sur la transformation linéaire de la différentielle elliptique $\frac{dx}{\sqrt{x}}$. *Annales de Toulouse*, II, 1888.

Stolz, O. (Innsbruck). [*Vedi* t. II, p. 61]. Ueber Verallgemeinerung eines Satzes von Cauchy. *Math. Annalen*, XXXIII, 1888.

Stone, O. (University of Virginia). Report of the Director of the Leander McCormick Observatory of the University of Virginia for the year ending June ist, 1888.

Sturm, R. (Münster i/w.). [*Vedi* t. II, p. 18]. Ueber die Zahl und Lage der singulären Punkte bei den Strahlencongruenzen zweiter Ordnung. *Götting. Nachricht.*, N° 17, 19. December 1888.

Tarry, G. (Alger). Représentation géométrique des coniques et quadriques imaginaires. Paris, Gauthier-Villars, 1886.

Géométrie de situation : nombre de manières distinctes de parcourir en une seule course toutes les allées d'un labyrinthe rentrant, en ne passant qu' une seule fois par chacune des allées. *Assoc. Française, Congrès de Nancy*, 1886.

Essai sur la géométrie des figures imaginaires. *Ibid., Congrès de Toulouse*, 1887.

Nouvel essai sur la géométrie imaginaire. *Ibid., Congrès d'Oran*, 1888.

Tarry, G. et **Neuberg, J.** Sur les polygones et les polyèdres harmoniques. *Assoc. Française, Congrès de Nancy*, 1886.

Teixeira, F. Gomes (Porto). Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques (Extrait d'une Lettre adressée à M. L e r c h). *Bull. de la Société Royale des Sciences de Bohême*, 1888.

Sur le développement des fonctions implicites. *Journ. de Mathématiques*, V_4, 1889.

Tonelli, A. (Roma). [*Vedi* t. I, p. 116]. Sopra una certa equazione differenziale a derivate parziali del 2° ordine. *Rend. Acc. Lincei*, IV, 2° sem., 2 dicembre 1888.

Sopra una certa equazione a derivate parziali del 3° ordine. *Ibid.*, IV, 2° sem., 21 dicembre 1888.

Sopra una classe di equazioni differenziali a derivate parziali di ordine *m*. *Ibid.*, V, 1° sem., 3 febbrajo 1889.

Venturi, A. (Palermo). [*Vedi* t. II, p. 19]. Sulla formazione delle immagini di oggetti celesti o terrestri sulle grandi superficie liquide della Terra. *Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani*, XVIII, 1889.

Dell'influenza che la rifrazione astronomico-geodetica esercita sulla formazione dell'immagine del sole nascente riflesso sul mare. *Rend. Acc. Lincei*, V, 1° sem., 3 marzo 1889.

Visalli, P. (Reggio Calabria) La trasformazione quadratica (2, 2). *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Vivanti, G. (Mantova). [*Vedi* t. II, p. 61]. Nuove ricerche sulle funzioni intere. *Giorn di Battaglini*, XXVI, 1888.

Fondamenti della teoria dei tipi ordinati. *Ann. di Matematica*, $XVII_2$, 1889.

Sulle funzioni analitiche. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Volterra, V. (Pisa). [*Vedi* t. II, p. 56]. Delle variabili complesse negli iperspazii. Note Iª e IIª. *Rend Acc. Lincei*, V. 1° sem, 3 e 17 febbrajo 1889.

Sulle funzioni coniugate, *Ibid.*, V, 1° sem., 28 aprile 1889.

Sulle funzioni di iperspazii e sui loro parametri differenziali. *Ibid.*, V, 1° sem., 5 maggio 1889.

Weiler, A. (Zürich). [*Vedi* t. II, p. 62]. Ueber die Osculationskreise bei Kegelschnitten. *Schlömilch's Zeitschr.*, XXXIV, 1889.

Yale University. Catalogue, CLXXXIXth Year. 1888-89.

Zeuthen, H.-G. (Kiöbenhavn), [*Vedi* t. II, p. 56]. Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, med Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementaere Systemer af fjerde Orden. Med 5 Tavler. (Avec un Résumé en français). *Mémoires de l'Académie Royale de Copenhague*, X_5, N° 4, 1873.

Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument. *Bull. de l'Acad. Royale Danoise des Sciences et des Lettres*, 1888.

Extrait d'une Lettre adressée à M. G u c c i a. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

PUBBLICAZIONI PERIODICHE

CON LE QUALI IL CIRCOLO SCAMBIA I SUOI *Rendiconti.*

American Journal of Mathematics.

[*Vedi* t. II, p. 67].

VOLUME X. — NUMBER 4 (July 1888):

Liouville (R.): Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbure constante (283-292).
Page: On the Primitive Groups of Transformations in Space of Four Dimensions (293-346).
Gorton: Line Congruences (347-367).
Franklin: Some Theorems concerning the Centre of Gravity (368-370). *Fine del vol.* X.

Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[*Vedi* t. II, p. 73].

VOLUME V. — 1888:

Bettazzi: Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali (1-47).
Bazzi: Sullo spostamento delle linee di livello che si osserva in un disco metallico ruotante traversato da correnti voltaiche (49-76).
Fibbi: Sulle superficie che contengono un sistema di geodetiche a torsione costante (77-164).
Paladini: Sul moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un punto fisso (165-226).

Annali di Matematica pura ed applicata.

[*Vedi* t. II, p. 79].

SERIE II. — TOMO XVI.

FASCICOLO 3° (dicembre 1888).

Brioschi: Sopra una trasformazione delle equazioni del quinto grado (181-189).
Berzolari: Ricerche sulle trasformazioni piane, univoche, involutorie, e loro applicazione alla determinazione delle involuzioni di quinta classe (191-275).

FASCICOLO 4° (marzo 1889):

Malet: On Certain Definite Integrals (277-290).
Jung: Ricerche sui sistemi lineari di genere qualunque e sulla loro riduzione all'ordine minimo. Memoria IIª (291-327).
Brioschi: Principii di una teoria sulla trasformazione delle equazioni algebriche (329-334). *Fine del t.* XVI.

Annals of Mathematics.

[*Vedi* t. II, p. 68].

VOLUME IV.

NUMBER 4 (August, 1888):

Woodward: On the Diffusion of Heat in a Homogeneous Rectangular Mass; with special reference to Bars used as Standards of Length (101-127).
Harris: Note on the Theory of Images (128).
Kummel: On some Fundamental Theorems of Mensuration in One, Two, and Three Dimensions (129-134).

NUMBER 5 (October, 1888):

Hyde: The Directional Theory of Screws (137-155).
Johnson: On M o n g e's Solution of the Non-Integrable Equation between Three Variab'es (156-160).
McCulloch: A Theorem in Factorials (161-163). — *Fine del vol.* IV.

Atti del Collegio degl'Ingegneri e degli Architetti di Palermo.

[*Vedi* t. II, p. 87].

ANNO XI (1888): FASCICOLO 3° (settembre-dicembre).

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

[*Vedi* t. II, p. 70].

SERIE VI*. — TOMO VI (novembre 1887-ottobre 1888) — DISPENSA X:
Montesano: Su alcuni gruppi chiusi di trasformazioni involutorie nel piano e nello spazio (1425-1444). — *Fine del tomo* VI.

Berichte ueber die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

(Mathematisch-Physische Classe).

[*Vedi* t. II, p. 74].

VIERZIGSTER BAND. — 1888:

Scheibner: Mathematische Bemerkungen (Auszüge aus Briefen an Prof. Baltzer (1-13).
Sophus Lie: Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie (14-21).
Neumann: Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper. Zweiter Artikel (22-88).
Hankel: Das elektrodynamische Gesetz ein Punktgesetz (89-109).
Neumann: Ueber die Stetigkeit mehrdeutiger Functionen (120-123).

Scheibner : Die complexe Multipilcation der Thetafunctionen (154-162).
Neumann : Ueber das Verhalten der Green'schen Function an der Grenze ihres Gebietes (163-167).

Bibliotheca Mathematica.

[*Vedi* t. II, p. 48].

1888.

Bjerknes : La tentative de Degen de généraliser le théorème d'addition d'Euler (1-2).
Bobynin : De l'étude sur l'Histoire des mathématiques en Russie (103-110).
Cantor (M.) : Ahmed und sein Buch ueber die Proportionen (7-9).
Curtze : Ueber einen De La Hire zugeschriebenen Lehrsatz (65-66).
Eneström : Sur trois petits traités mathématiques attribués au savant suédois Peder Månsson (17-18).
— Sur un point de l'histoire du problème des isopérimètres (38).
Günther : Ueber eine merkwürdige Beziehung zwischen Pappus und Kepler (81-87).
Le Paige : Sur une traduction néerlandaise de la méthode de perspective de Girard Desargues et sur les « Leçons de ténèbres » (10-12).
Loria : Notizie storiche sulla Geometria numerativa (39-48, 67-80).
Mansion : Sur le cours d'histoire des mathém tiques de l'Université de Gand (33-35).
— Note historique sur la règle de médiation (36).
Narducci : Sur l'optique de Claude Ptolémée (97-102).
Steinschneider : Ueber das Wort Almanach (13-16).
— Iusuf ben Ibrahim und Ahmed ben Iusuf (49-52, 111-117).
Tannery (P.) : Études sur Diophante. IV (3-6).
Weissenborn : Ueber die verschiedenen Namen des sogenannten geometrischen Quadrates (37).
Wohlwill : Hat Leonardo da Vinci das Beharrungsgesetz gekannt? (19-26).

Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts de Belgique.

[*Vedi* t. II, p. 67].

LVIII[e] ANNÉE. — III[e] SÉRIE. — TOME XVI (juillet-décembre 1888) :

Deruyts (J.) : Sur la différentiation mutuelle des fonctions invariantes (207-215).
— Sur quelques propriétés des transformations linéaires (576-589).
Goedseels : De la longueur d'une ligne (86-92).
Catalan : Sur un cas particulier de la formule du binôme (194).

Bulletin scientifique.

[*Vedi* t. II, p. 74].

TROISIÈME ANNÉE (Année scolaire 1888-89):

Jablonski: Sur la recherche des antécédents d'une proposition (96-101).
— Sur le calcul approché des racines d'une équation algébrique (345-349).
Laigle: Note sur deux questions de la théorie élémentaire des maxima et minima (237 241).
Lebon: Note sur le calcul de quelques intégrales (248-249).
Longchamps (de): Applications élémentaires des premiers principes de la géométrie analytique (60-65).
Niewenglowski Sur la définition des nombres incommensurables (201-207).

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky.

[*Vedi* t. II, p. 47].

ROČNÍK XVIII (1889):

Guth: Blaže je Pascala: O duchu geometrickém (181-188, 224-230, 297-309).
Hanuš: O rovnici stupně čtvrtého (32-33).
Havlíček: Drobnosti ze stereometrie (76-78).
Hoza: O relativních chybách čísel neúplných (5-9, 53-58).
— Příspěvek k nauce o relativních chybách (173-175).
Jarolímek: Tabulka binomických koefficientů $\left(\frac{1}{n}\right)_r$ (30-31).
— Kolik jest průsečíků na úhlopříčnách mnohoúhelníka? (175-176).
Jeřábek (A): Úloha ze stereometrie (249-250).
Jeřábek (V.): Poznámka o křivkách rovinných (245-246).
Ježek: Příspěvek ku zkrácenému počítání (17-21, 58-63).
Jung (V.): Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených) (23-29, 63-68, 230-235, 316-320).
Koláček: Poznámka k substituci Landenově (21-23).
— Stručný náčrtek nynějšího stavu theoretické optiky se zřetelem k prácem vlastním v tomto oboru (273-289).
Kostlivý: Pozdní mrazy a předvídání mrazů nočních vůbec (101-107, 309-316).
Kroutil: Jednoduchá demonstrace elektrických zbytků (69-70).
Lerch: Poznámka k článku předcházejícímu (33 34).
Navrátil: Nový druh elektrických obrazců (213-217, 289-297).
Novotný: Sestrojení polár kuželoseček (71-76, 235 245).
Pelíšek: O základech perspektivy reliefní (78-81, 107-130).
Plcb: Druhý nástin školního výkladu Foucaultovy odchylky (177-181, 217-224).
Procházka: Příspěvek ku sestrojování křivek intensitních ploch zborcených (1-5).
Seydler: Logarithmický potencial o třech proměnných (169-173).
St. Ball-Seydler: Dynamická pohádka (150-169).

Starý: Kterak zacházeti s galvanickými články Leclanché-ovými (247-249).
Studnička: O Leibnicově poslední úloze z neurčité analytiky (97-101).
Sucharda: Důkaz a několik poznámek ku jisté větě Bertrandově (49-52).
Zahradník: O řešení kvadratických rovnic logarithmy Gaussovými (9-17).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris.
[*Vedi* t. III, p. 5].

TOME CVIII (PREMIER SEMESTRE 1889):

N° 1 (7 janvier):

Poincaré: Sur les séries de M. Lindstedt (21-24).
Bertrand de Fontviolent: Sur la détermination des forces élastiques et de leurs lignes d'influence dans les poutres assujetties à des liaisons surabondantes (Extrait) (45-48).

N° 2 (14 janvier):

Gyldén: Sur les termes élémentaires dans les coordonnées d'une planète (79-82).
Gilbert: Sur les accélérations d'ordre quelconque des points d'un corps solide dont un point est fixe (92-94).

N° 3 (21 janvier):

Resal: Sur un point de la question des plaques élastiques homogènes (114-115).
Gyldén: Sur les termes élémentaires dans les coordonnées d'une planète (116-119).
Picard: Sur les intégrales multiples relatives à trois variables complexes (132-133).
Klein: Formes principales sur les surfaces de Riemann (134-136).

N° 4 (28 janvier):

Lerch: Sur le développement en série de certaines fonctions arithmétiques (171-174).
Sauvage: Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles linéaires (174-176).

N° 5 (4 février):

Kœnigs: Extension du problème d'Euler sur l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2$, au cas d'une surface quelconque (221-224).
Appell: De l'homographie en Mécanique (224-226).
Andrade: Sur une réduction du problème des n corps qui conserve $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ distances mutuelles (226-228).

N° 6 (11 février):

Klein: Des fonctions thêta sur la surface générale de Riemann (277-280).
Andrade: Sur les réductions du problème des n corps qui conservent certaines distances mutuelles (280-281).

N° 7 (18 février):

Liouville (*R.*): Sur les représentation géodésiques des surfaces (335-337).

Romieux: Sur la loi de déformation, par refroidissement, d'une masse fluide homogène en rotation (337-340).

Gouy: Sur une loi générale relative aux effets des transformations réversibles (341-344).

N° 8 (25 février):

Mayer (*E.*): Sur une question du Calcul des probabilités (391-392).

Mittag-Leffler: Lettre à M. le Secrétaire perpétuel, annonçant que M. Poincaré a obtenu le prix fondé par S. M. le Roi de Suède et qu'il a été accordée une médaille d'or à M. Appell (387).

N° 9 (4 mars):

Goursat: Les transformations isogonales en Mécanique (416-448).

Darboux: Remarques sur la Communication précédente (449-450).

N° 10 (11 mars):

Halphen: Sur la résolvante de Galois dans la division des périodes elliptiques par 7 (476-477)

Lipschitz: Sur un théorème arithmétique (489-492).

Raffy: Sur un problème de la théorie des surfaces (493 494).

Liouville (*R.*): Sur le caractère auquel se reconnaît l'équation différentielle d'un système géodésique (495-496).

Blutel: Recherches sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré (496-498).

Ocagne (*d'*): Calcul direct des termes d'une réduite de rang quelconque d'une fonction continue périodique (499-501).

Beltrami: Sur la théorie de la déformation infiniment petite d'un milieu (502-505).

Gouy: Sur les transformations et l'équilibre en Thermodynamique (507-509).

N° 11 (18 mars):

Poincaré: Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la Thermodynamique (550-553).

Picard: Sur certaines expressions quadruplement périodiques dépendant de deux variables (557-559).

Kobb: Sur le mouvement d'un point matériel sur une sphère (559-561).

Ribière: Sur l'équilibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle (561-563).

N° 12 (25 mars):

Stieltjes: Sur les dérivées de séc x (605-607).

Appell: Sur certaines expressions quadruplement périodiques (607-609).

Pellet: Sur les caractères cubiques et biquadratiques (609 610).

N° 13 (1er avril):

Boussinesq: Formules de la dissémination du mouvement transversal dans une plaque plane indéfinie (639-645).

Sylvester: Sur la réduction biorthogonale d'une forme linéo-linéaire à sa forme canonique (651-653).

Picard: Remarques sur certaines séries quadruplement périodiques (659-660).

Floquet: Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe (661-663).

Duhem: Sur la transformation et l'équilibre en Thermodynamique (665-667).

N° 14 (8 avril):

Boussinesq: Expressions approchées du contour de l'ellipse et de la surface de l'ellipsoïde, en fonction des deux moyennes arithmétique et géométrique des demi-axes (695-699).

Hadamard: Sur la recherche des discontinuités polaires (722-724).

Sonin: Sur les termes complémentaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling (725-727).

N° 15 (15 avril):

Gouy: Sur l'énergie utilisable et le potentiel thermodynamique (794).

N° 16 (23 avril):

Tisserand: Sur la théorie de la capture des comètes périodiques (827-832).

N° 17 (29 avril):

Brioschi: Les discriminants des résolvantes de Galois (878-879).

Pincherle: Sur une application de la théorie des fractions continues algébriques (383-839).

N° 18 (7 mai) – N° 19 (13 mai):

(Alcuna comunicazione di Matematica).

N° 20 (20 mai):

Sylvester: Sur la correspondance complète entre les fractions continues qui expriment les deux racines d'une équation quadratique dont les coefficients sont des nombres rationnels (1037-1041).

N° 21 (27 mai):

Hermite: Discours prononcé aux funérailles de M. Halphen, le 23 mai 1889 (1079-1081).

Sylvester: Sur la représentation des fractions continues qui expriment les deux racines d'une équation quadratique (1084-1086).

N° 22 (3 juin):

(Alcuna comunicazione di Matematica)

N° 23 (11 juin):

Sylvester: Sur la valeur d'une fraction continue finie et purement périodique (1195-1198).

N° 24 (17 juin):

(Alcuna comunicazione di Matematica).

N° 25 (24 juin) [*Fin du tome* CVIII]:

Stieltjes: Sur un développement en fraction continue (1297-1298).

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.

[*Vedi* t. II, pag. 69].

SERIE II^a. — VOL. XXI (1888). — FASCICOLI 15-20 (*Fine*):

Jung: Sull'*eccesso* degli elementi fondamentali di un sistema lineare di genere qualunque (719-723).
— Sul numero delle *curve degeneri* contenute in un fascio di genere qualunque (723-725).

Montesano: Su le trasformazioni involutorie monoidali (*continuaz. e fine*) (684-687).
— Su una classe di trasformazioni involutorie dello spazio (688-690).

Platner: Sul numero delle maniere di ottenere una somma n, o una somma non superiore ad n (n intiero positivo), prendendo r termini della serie indefinita 1. 2. 3. 4. 5. (690-695, 702-708).

Revue Scientifique.

[*Vedi* t. II, p. 74].

III^e SÉRIE. — TOME XVI (XLII de la Collection) [Deuxième Semestre 1888].

Nos. 23-25. — No. 26 (29 décembre):

Delbouf: Un problème de logique à propos de la démonstration élémentaire du théorème de d'Alembert sur le nombre des racines d'une équation algébrique (823-825).

Comptes Rendus de l'Association Francaise pour l'avancement des Sciences.

[*Vedi* t. II, p. 77].

XVII^ème SESSION (Oran, 1888) — 2^e Partie (Notes et Mémoires):

Berdellé: Réponse à quelques objections contre l'arithmétique directive (109-112).

Collignon: Examen de certaines séries numériques et application à la géométrie (4-24).
— Recherches sur la courbe d'ombre d'un piquet vertical (53-72).

Genty: Note de géométrie vectorielle sur la théorie des surfaces (95-99).

Humbert (E.): Sur les équations du troisième degré qui servent à la recherche des plans principaux d'une surface du second ordre ou à l'étude de l'intersection de deux coniques. — Discussion algébrique complète de ces équations (145-159).
— Démonstration simple et directe de cette propriété du catalecticant d'être un invariant (163-164).
Laisant: Propriété des équations. — Conséquences géométriques (1-4).
— Note sur la somme des p premiers coefficients du développement $(x+y)^n$ (72-75).
— Sur une propriété des tangentes aux coniques (113-118).
Langlois: Sur un point de la théorie du mouvement atomique (159-162).
Lemoine: De la mesure de la simplicité dans les sciences mathématiques (75-95).
— Notes sur diverses questions de la géométrie du triangle (165-175).
Le Pont: Note d'analyse (25-29).
Lucas: Sur un théorème de Cauchy (29-31).
Marsilly (Commines de): Réfutation de l'interprétation de la géométrie non euclidienne essayée par M. Beltrami (121-135).
Neuberg: Sur les triangles équibrocardiens (135-144).
Pelletreau: Problèmes de géométrie (99-109).
Sylvester: Sur certains cas du théorème de Dirichlet regardant les séries arithmétiques (118-120).
Tarry: Nouvel essai sur la géométrie imaginaire (31-53).

Educational Times and Journal of the College of Preceptors.

[*Vedi* t. II, p. 79].

New Series. — Vol. XLII (1889) — N. 333-338 (Januari-June).

Mathematical Questions and Solutions (35-38, 80-84, 151-154, 187-190, 221-224, 259-262).

Giornale di Scienze Naturali ed Economiche

pubblicato per cura della « Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo ».

[*Vedi* t. II, p. 48].

Volume XIX (Anno 1888).

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

[*Vedi* t. II, p. 40].

Band XVII (Jahrgang 1885): Heft 3. (*Fine del volume*).

Band XVIII (Jahrgang 1886): Heft 1, 2, 3. (*Fine del volume*).

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas.

[*Vedi* t. II, p. 72].

VOLUME VIII (1887-88). — Ni 5-6:

Teixeira: Sobre a derivação das funcções compostas (129-131. *Fine*).
Lerch: Modification de la troisième démonstration donnée par Gauss de la loi de réciprocité de Legendre (137-146).
Gutzmer: Sur certaines moyennes arithmétiques des fonctions d'une variable complexe (147-156).
Lerch: Sur une propriété des nombres (161-163).
Teixeira: Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques (164-170).
Ocagne (d'): Problème d'algèbre (171-174).
Le Pont: Note de calcul intégral (175-182). — *Fine del vol.* VIII.

Journal de Mathématiques élémentaires.

[*Vedi* t. II, p. 70].

IIIe SÉRIE. — XIIe ANNÉE (1888) — Nos 10, 11, 12 (oct., nov., décem.):

Longchamps (de): Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre (217-222, 252-256, 271-275).
Loir: Divisibilité d'un nombre par le produit de nombres premiers, formant un groupe défini (241-244, 265-268).
Vigarié: Sur le premier cercle de Lemoine (244-251).
Darboux: Démonstration du théorème fondamental de la théorie des maximums (268-270).
Poulain: Sur la terminologie de la géométrie du triangle (275-279).

Journal de Mathématiques pures et appliquées

fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par Joseph Liouville. Publié de 1875 à 1884 par H. Resal. — QUATRIÈME SÉRIE publiée par Camille Jordan, avec la collaboration de G. Halphen, E. Laguerre, M. Lévy, A. Mannheim, É. Picard, H. Resal.

TOME I. — ANNÉE 1885:

Appell: Sur l'inversion des intégrales abéliennes (245-279).
Autonne: Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. — Premier Mémoire: Généralités et groupes quadratiques (431-454).
Darboux: Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe (403-430).
Gordan: Sur les équations du cinquième degré (455-458).
Halphen: Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires (11-85).
Hermite: Sur les fonctions holomorphes (9-10).

Humbert: Application géométrique d'un théorème de J a c o b i (347-356).

Laguerre: Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels (135-165).

Le Cordier: Actions électrodynamiques renfermant des fonctions arbitraires: hypothèses qui déterminent ces fonctions (357-401).

Picard: Sur les fonctions hyperabéliennes (87-128).

— Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce (281-346).

Poincaré: Sur les courbes définies par les équations différentielles (167-244).

Saint-Germain (de): Sur une application des équations de L a g r a n g e (129-134).

TOME II. — ANNÉE 1886:

Anglin: Sur le coefficient du terme général dans certains développements (139-150).

Autonne: Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe C r e m o n a. — Deuxième Mémoire: Groupes cubiques (49-103).

Humbert: Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques (239-329).

Jablonski: Sur une loi de F r e s n e l (441-466).

Lipschitz: Propositions arithmétiques tirées de la théorie de la fonction exponentielle (Extrait d'une Lettre adressée à M. H e r m i t e) (219-237).

— Recherches sur la transformation par des substitutions réelles, d'une somme de deux ou de trois carrés en elle même. (Traduit par J. M o l k). (373-439).

Mannheim: Mémoire d'Optique géométrique comprenant la théorie du point représentatif, d'un élément de surface réglée et son emploi tant pour la démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques (5-48).

Picard: Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce (329-372).

Poincaré: Sur les courbes définies par les équations différentielles (quatrième Partie) (151-217).

Weierstrass: Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle (Traduit par L é o n c e L a u g e l) (105-113, 115-138).

TOME III. — ANNÉE 1887:

Appell: Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ (5-52).

Autonne: Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact (63-85).

Darboux: Sur la résolution de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues (305-325).

David: Application de la dérivation d'A r b o g a s t. — Formule générale pour le changement de la variable indépendante (53-62).

Goursat: Recherches sur les intégrales algébriques de l'équation de Kummer (255-304).

Hugoniot: Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (première Partie) (477-492).

Humbert: Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques (327-404).

Krause: Sur les fonctions quadruplement périodiques de deuxième et de troisième espèce (Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite) (87-107).

Léauté: Sur la caractéristique cinématique d'un système mécanique en mouvement (465-476).

Poincaré: Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique (405-464).

Sylow: Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques (109-254).

Tome IV. — Année 1888 :

Autonne: Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. — *Premier Mémoire*: Étude d'une substitution crémonienne isolée (177-247). — *Second Mémoire*: Multiplication des crémoniennes, groupes quadratiques; groupe directeur (407-464).

Duhem: Sur un théorème d'Électrodynamique (369-405).

Gilbert: Sur les composantes des accélérations d'ordre quelconque suivant trois directions rectangulaires (465-473).

Halphen: Sur le mouvement d'un solide dans un liquide (5-81).

Hilbert: Lettre adressée à M. Hermite (249-256).

Hugoniot: Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (seconde Partie) (153-167).

Humbert: Sur les courbes cycliques de direction (129-131).

— Sur les courbes algébriques planes rectifiables (133-151).

— Sur quelques propriétés des aires sphériques (313-348).

Jordan: Sur les transformations d'une forme quadratique en elle-même (349-368).

Klein: Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique (Extrait d'une Lettre adressée à M. C. Jordan) (169-176).

Lévy (*Maurice*): Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel (257-312).

Pepin: Sur quelques formules d'Analyse utiles dans la Théorie des nombres (83-127).

Journal de Mathématiques spéciales.

[*Vedi* t. II, p. 70].

IIIe Série. — XIIe Année (1888) Nos 10, 11, 12 (oct., nov., décem.):

Poulain: Théorèmes sur les équations algébriques (217-219).

Ocagne (*d'*): Remarques sur les transversales réciproques (241-242).

Vigarié: Géométrie du triangle. Étude bibliographique et terminologique (242-244, 276-279).

Longchamps (*de*): Quelques problèmes de géométrie pratique (244-249, 279-283).

Laisant: Polaires arithmétiques et géométriques d'une conique (265-269).

Griess: Détermination des foyers des sections planes d'une quadrique (269-274).

Lévy (*Lucien*): Note d'algèbre (274-275).

Journal für die reine und angewandte Mathematik.

[*Vedi* t. II, p. 78].

Band CIV.

Heft 2 (2. Januar 1889):

Züge: Das Potential homogener ringförmiger Körper, insbesondere eines Ringkörpers mit Kreisquerschnitt (89-101).

Hazzidakis: Ueber invariante Differentialausdrücke (102-115).

Pochhammer: Ueber drei lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung (116-151).

— Ueber eine Klasse von Functionen einer complexen Variablen, welche die Form bestimmter Integrale haben (152-173).

Königsberger: Der Cauchy'sche Satz von der Existenz der Integrale einer Differentialgleichung (174-176).

Heft 3 (5. April 1889):

Jaerisch: Allgemeine Integration der Elasticitätsgleichungen für die Schwingungen und das Gleichgewicht isotroper Rotationskörper (177-210).

Reye: Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume. I. (211-240).

Bois-Reymond (*du*): Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung (241-264).

Heft 4 (21. Mai 1889):

Bois-Reymond (*du*): Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung (265-301).

Stahl: Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung. Fortsetzung. Siehe dieses Journal Bd. 101, S. 300 (302-320).

Netto: Anwendung der Modulsysteme auf eine elementare algebraische Frage (321-340).

Lilienthal (*von*): Zur Krümmungstheorie der Flächen (341-344).

Genocchi: Première partie du chapitre XIII de la Note sur la théorie des résidus quadratiques (345-347).

Kronecker: Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste (348-351).

— Paul du Bois-Reymond (352-354).

Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

[*Vedi* t. II, p. 40].

JAHRGANG 1888:

Bezold (von): Zur Thermodynamik der Atmosphaere (287-324, 783-800).
Fuchs: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen (727-738, 817-834).
Helmholtz (von): Ueber atmosphaerische Bewegungen (413-429).
Kronecker: Ueber die arithmetischen Sätze, welche Lejeune-Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift entwickelt hat (241-247).
— Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme (249-258), 263-281, 331-352, 379-396, 615-648).
— Bemerkungen ueber Dirichlet's letzte Arbeiten (259-262).
Minkowski: Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit (711-726).
Noether: Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen (45-49).
Oberbeck: Ueber die Bewegungserscheinungen der Atmosphaere (221-233, 739-748).
Reden, gehalten bei der Aufnahme des Hrn. Möbius in die Akademie in der Leibniz-Sitzung am 28. Juni 1888 (455-460).
Preisaufgabe der Steiner'schen Stiftung (461 463)

Mathesis.

[*Vedi* t. II, p. 71].

TOME VIII (1888) — Nos 10, 11, 12 (oct., nov., décem.):

Lemoine: De la mesure de la simplicité dans les constructions mathématiques (217-222, 241-244).
Gilbert: Détermination, en grandeur et en direction, des axes d'une section diamétrale de l'ellipsoïde (247-249).
Barbarin: Problème sur la droite de profil (265-269).
Pisani: Questions de géométrie analytique (269-271).

Mémoires de l'Académie Impériales des Sciences de St.-Pétersbourg.

VIIe SÉRIE. — TOME XXXVI — No 8 (26 janvier 1888):

Charlier: Ueber eine mit dem Problem der drei Körper verwandte Aufgabe (18 pages).

Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège.

[*Vedi* t II, p. 30].

IIe SÉRIE. — TOME XV (novembre 1888):

Catalan: Mélanges mathématiques. Tome troisième. (275 pages).
Deruyts (J.): Sur les semi-invariants de formes binaires (11 pages).
— — (2e communication) (8 pages).

Le Paige: Démonstration d'un théorème de von Staudt (8 pages).

— Notice historique sur la détermination des coordonnées geographiques de Liège (9 pages).

Pizzetti: Sur le calcul du résultat d'un système d'observations directes (36 pages).

Memoirs of the National Academy of Sciences (Washington).

VOLUME I (1866):

Peirce: The Saturnian System (263-286).

Newton: On Shooting Stars (291-312).

Bartlett: Rifled Guns (313-343).

VOLUME II (1884).

VOLUME III. PART I. (1885):

Gilbert (G. K.): The Sufficiency of Terrestrial Rotation for the Deflection of Streams (7-10).

VOLUME III. PART II (1886).

Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario.

[*Vedi* t. II, p. 75].

ANNO III (1888). — FASCICOLI 5 e 6 (sett.-ott. e nov.-dic.):

Sadun: Condizioni di divisibilità d'un polinomio per un binomio della forma $x^r - a^r$ (129-136).

Ricordi: Sull'approssimazione dell'ordinaria interpolazione nelle tavole di logaritmi delle funzioni goniometriche (*Continuaz. e fine*) (137-144).

Gremigni: Le proprietà della somma e della differenza estese ai polinomi algebrici (161-167).

Besso: Teoremi sul tronco di prisma (175-179).

Proceedings of the London Mathematical Society.

[*Vedi* t. II, p. 31],

VOL. XIX. — TWENTY-FOURTH SESSION (1887-88):

Basset: On the Stability of a Liquid Ellipsoid which is rotating about a Principal Axis under the Influence of its own Attraction (46-56).

Cayley: A Case of Complex Multiplication with Imaginary Modulus arising out of the Cubic Transformation in Elliptic Functions (300-301).

Cockle: On the General Linear Differential Equation of the Second Order (257-278).

Elliott: On Pure Ternary Reciprocants, and Function allied to them (6-23).

— On Cyclicants, or Ternary Reciprocants, and allied Functions (377-405).

Forsyth: The Differential Equations satisfied by Concomitants of Quantics (24-45).

Genese: Geometrical Demonstration of F u e r b a c h's Theorem concerning the Nine-Point Circle (216-218).

Greenhill: Confocal Paraboloids (129-142).

— Complex Multiplication Moduli of Elliptic Functions (301-364).

Hill: On the *c*-and *p*-Discriminants of Integrable Differential Equations of the First Order (561-589).

Hobson: Synthetical Solutions in the Conduction of Heat (279-294).

Johnson: Harmonic Decomposition of Functions and some Allied Expansions (75-89).

Lachlan: On certain Operators in connection with Symmetric Functions (Supplementary Note) (294-299).

Lamb: On Reciprocal Diagrams in Dynamics (144-151).

— On the Flexure and the Vibrations of a Curved Bar (365-376).

Love: The Free and Forced Vibrations of an Elastic Spherical Shell containing a given Mass of Liquid (170-207).

MacMahon: On the Algebra of Multilinear Partial Differential Operators (112-128).

— Symmetric Functions and the Theory of Distributions (220-256).

Mathews: Some applications of Elliptic Functions to the Theory of Twisted Quartics (507-520).

Rayleigh: On the Stability or Instability of certain Fluid Motions (67-74).

— On Point-, Line-, and Plane Sources of Sound (504-507).

Roberts (*R. A.*): On the Volume generated by a Congruency of Lines (207-215).

Roberts (*S*): On the Analogues of the Nine-Points Circle in Space of Three Dimensions, and connected Theorems (152-161).

— On the Figures formed by the Intercepts of a System of Straight Lines in a Plane, and on analogous Relations in Space of Three Dimensions (405-422).

Rogers: On a Theorem analogous to G a u s s's in Continued Fractions, with applications to Elliptic Functions (550- 560).

Russell: Geometry of the Quartic (56-67).

— On $k\lambda - k'\lambda'$ Modular Equations (90-111).

Sharp: On Simplicissima in Space of *n*-Dimensions (423-482).

Thomson: Electrical Oscillations (520-550).

Tucker: Isoscelians (163-170).

— A Group of Isostereans (218-220).

Walker: On a Method in the Analysis of Curved Lines. Part III. (483-502).

Proceedings of the Royal Society (London).

[*Vedi* t. II, p. 73].

Vol. XLIV (From April 12, 1888, to June 21, 1888). — No. 271, 272 (*Fine*).

Vol. XLV (From November 15, 1888, to April 11, 1889). — No. 273-279:

Rayleigh: On the Bending and Vibration of thin elastic Shells, especially of Cylindrical Form (105-123).

Hennessy: On the Maximum Discharge through a Pipe of Circular Section when the effective Head is due only to the Pipe's Inclination (145-147).

Rayleigh: Note on the Free Vibrations of an infinitely long Cylindrical Shell (443-448).

Thomson: The Resistance of Electrolytes to the Passage of very rapidly alternating Currents, with some Investigations on the Times of Vibration of Electrical Systems (269-290).

Berichte des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines in Innsbruck.

[*Vedi* t. II, pag. 73].

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma).

[*Vedi* t. II, p. 46].

VOLUME IV (1888) — SECONDO SEMESTRE:

Battaglini: Sui punti sestatici di una curva qualunque. Nota I^a (238-246).

Betti: Sopra la Entropia di un sistema Newtoniano in moto stabile (113-115, 195-198).

Bianchi: Sulle superficie Fuchsiane (161-165).

Brioschi: Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni iperellittiche a due variabili (341-347, 429-436).

Cesàro: Sur une distribution de signes (133-138).

— Moti rigidi e deformazioni termiche negli spazi curvi (376-384).

Padova: Sulla teoria delle coordinate curvilinee (369-376, 454-458).

Tonelli: Sopra una certa equazione differenziale a derivate parziali del 2° ordine (384-388).

— Sopra una certa equazione a derivate parziali del 3° ordine (458-461).

Volterra: Sulle funzioni analitiche polidrome (355-361).

VOLUME V (1889) — PRIMO SEMESTRE:

Arzelà: Funzioni di linee (342-348).

Beltrami: Un precursore italiano di Lobatschewsky (441-448).

— Sull'estensione del principio di D'Alembert all'elettrodinamica (852-856).

Bianchi: Sui sistemi di equazioni lineari ai differenziali totali (312-323).

— Sulle forme quadratiche a coefficienti e a indeterminate complesse (589-599).

Bigiavi: Sulle equazioni differenziali lineari (651-657).

Brioschi: Notizie sulla vita e sulle opere di Giorgio Enrico Halphen (815-823).

Cesàro: Sulle formole di Maxwell (199-204).

Crescini: Sul moto di una sfera che rotola su di un piano fisso (204-209).

Guccia: Sulla classe e sul numero dei flessi di una curva algebrica dotata di singolarità qualunque (18-25).

— Su una proprietà delle superficie algebriche dotate di singolarità qualunque (349-353).

— Sulla intersezione di tre superficie algebriche in un punto singolare e su una

questione relativa alle trasformazioni razionali nello spazio (456-461).

— Nuovi teoremi sulle superficie algebriche dotate di singolarità qualunque (490-497).

Montesano: Sulla trasformazione involutoria dello spazio che determina un complesso tetraedrale (497-501).

Morera: Sui moti elicoidali dei fluidi (611-617).

Padova: Sulle deformazioni infinitesime (174-178).

— La teoria di Maxwell negli spazi curvi (875-880).

Pincherle: I sistemi ricorrenti di prim'ordine e di secondo grado (8-12).

— Nuove osservazioni sui sistemi ricorrenti di prim'ordine e di secondo grado (323-327).

— Alcuni teoremi sulle frazioni continue (640-643).

Pizzetti: Sopra una generalizzazione del principio della media aritmetica (186-191).

— Sopra una certa formola esprimente la probabilità degli errori di osservazione (191-199).

— Sopra il calcolo dell'errore medio di un sistema di osservazioni (740-744).

Pucci: Dell'angolo caratteristico e delle linee caratteristiche di una superficie (501-507).

Reina: Sugli oricicli delle superficie pseudosferiche (448-456).

— Di alcune proprietà delle linee caratteristiche (881-885).

Ricci: Sopra certi sistemi di funzioni (112-118).

— Di un punto della teoria delle forme differenziali quadratiche ternarie (643-651).

Siacci: Commemorazione del Socio Ballada di S[t] Robert (243-247).

— Sulle forze atte a produrre eguali spostamenti (626-630, 856-860).

Tonelli: Sopra una classe di equazioni differenziali a derivate parziali di ordine *m* (178-185).

— Alcune formole relative a certe equazioni differenziali a derivate parziali di ordine *m* (508-514).

Volterra: Delle variabili complesse negli iperspazii (158-165, 291-299).

— Sulle funzioni coniugate (599-611).

— Sulle funzioni di iperspazii e sui loro parametri differenziali (630-640).

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.

[*Vedi* t. II, pag. 78].

VOLUME XXIV (1888-89):

Basso: In commemorazione di Rodolfo Clausius (3-4).

— Commemorazione del conte Paolo Ballada di Saint-Robert (235-240).

Castelnuovo: Geometria sulle curve ellittiche (4-22).

— Ricerche di geometria sulle curve algebriche (346-373).

D'Ovidio: Il covariante Steineriano di una forma binaria di 6° ordine (164-176).

— Cenno sulla Nota del prof. E. Beltrami « Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky (512-513).

Novarese: Studio sull'accelerazione di ordine *n* nel moto di una retta (400-410).

Pieri: Sulle tangenti triple di alcune superficie del sesto ordine (514-526).
Segre: Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche (734-756).
Valle: L'equazione modulare nella trasformazione delle frazioni ellittiche (374-389).

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution.

[*Vedi* t. II, pag. 80].

1886 — PART I.

Crónica Cientifica (Barcelona).

[*Vedi* t. II, pag. 73].

Año XI. — Núm. 266 (10 de Dic. de 1888) — Núm. 267 (25 de Dic. de 1888).

Proceedings of the Canadian Institute.

[*Vedi* t. II, pag. 47].

THIRD SERIES — VOL. VI: FASC. 2 (April 1889). — Annual Report (1887-88).

Acta Mathematica.

[*Vedi* t. II, pag. 72].

TOME XII (1888-1889):

Appell: Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe (1-55).
Brioschi: Sur l'équation du sixième degré (83-101).
Dobriner: Ueber das räumliche Achteck, welches die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung bilden (339-361).
Guichard: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques (57-71).
Hacks: Scherings Beweis des Reciprocitäts-Satzes für die quadratischen Reste dargestellt mit Hülfe des Zeichens [*x*] (109-111).
Heun: Bemerkungen zur Theorie der mehrfach lineär verknüpften Functionen (103-108).
Horn: Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen (113-175).
Hurwitz: Ueber eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung reeller Grössen (367-405).
Kowalevski: Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe (177-232).
Picard: Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre (323-338).
Tchebycheff: Sur les résidus intégraux qui donnent des valeurs approchées des intégrales (287-322).
Volterra: Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire (1er Mémoire) (233-286).
Vries: Ueber gewisse ebene Configurationen (63-81).
Zeuthen: Note sur les huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre (362-366).

Philosophical Transactions of the Royal Society of London (A).
[*Vedi* pag. 8].

FOR THE YEAR MDCCCLXXXVIII — VOL. 179:

Basset: On the Motion of a Sphere in a Viscous Liquid (43-63).
Sylvester and *Hammond*: On Hamilton's Numbers (65-71).
Walker: On the Diameters of a Plane Cubic (151-
Burbury: On the Induction of Electric Currents in Conducting Shells of Small Thickness (297-324).
Forsyth: Invariants, Covariants, and Quotient-Derivatives associated with Linear Differential Equations (377-489).
Love: The Small Free Vibrations and Deformation of a Thin Elastic Shell (491-546).

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen.

1888:

Frobenius: Ueber das Verschwinden der geraden Thetafunctionen (67-74).
Hilbert: Zur Theorie der algebraischen Gebilde (450-457).
Klein: Ueber irrationale Covarianten (191-194).
Maschke: Ueber eine quaternäre Gruppe von 51840 linearen Substitutionen, welche die ternäre Hesse'sche Gruppe als Untergruppe enthält (78-86).
Meyer (Franz): Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen (74-77).
Rodenberg: Ueber die während der Bewegung projectiv veränderlicher und starrer Systeme beschriebenen Curven und Flächen (176-191).
Schoenflies: Ueber reguläre Gebietstheilungen des Raumes (223-237).
— Beitrag zur Theorie der Kristallstructur (483-501).
Schroeter: Ueber lineare Konstructionen zur Herstellung der Konfigurationen n_3 (237-253).
Sturm: Ueber die Zahl und Lage der singulären Punkte bei den Strahlencongruenzen zweiter Ordnung (468-476).
Venske: Zur Theorie des Hallschen Phänomens (313-319).
Voigt: Bestimmung der Elasticitätsconstanten fur Flussspath und Pyrit (299-312).
— Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Steinsalz und Sylvin (323-340).
— Ueber adiabatische Elasticitätsconstanten (359-374).

Il Nuovo Cimento (Pisa).

(Ne sarà dato il sommario dei lavori matematici nel prossimo volume).

Jahresbericht der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag.

16. Januar 1886. — 15. Januar 1887. — 15. Januar 1888. — Für das Jahr 1888.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. (Mathematische-Naturwissenschaftliche Classe). Prag.

JAHRGANG 1886:

Lerch: Příspěvky k theorii funkcí eliptických (391-429).
— Contributions à la théorie des fonctions (571-582).
— O jistém intégralu omozeném (588-604).
Machovec: Beiträge zu den Eigenschaften des Axencomplexes der Flächen zweiten Grades und des allgemeinen tetraedralen Complexes (501-541).
Pelišek: Ueber perspectivische Restitution, Bewegung und Verzerrung (290-298).
— Ueber eine specielle, durch ein dioptrisches System bestimmte Raumcollineation (302-314).
— Grundzüge der Relief-Perspective (434-450).
Seydler: O rychlosti a urychlení různých stupňů při pohybu dle zákona gravitačního a při podobných pohybech (541-554).
— O analogiích mezi theorií deformací a theorií napjetí (618-633).
Solin: Zur graphischen Auflösung numerischer Gleichungen dritten Grades (6-13).
Studnička: Eine neue Anwendung der Kettenbruchdeterminanten (3-6).
Teixeira: Sur une limite relative aux polinômes de Legendre (Extrait d'une Lettre adressée à M. Lerch) (19-20).
Tesař: Zur graphischen Zusammensetzung der Kräfte und Drehungen im Raume (259-273).
— Die konische Loxodrome als Osculatrix (347-360).
Vaněček (I. S.): Sur le réseau de coniques du deuxième indice (281-289).
— Sur le réseau de coniques du $2n^{\text{ième}}$ indice (314-326).
— Sur le faisceau de coniques du $2n^{\text{ième}}$ indice (451-453).
Vaněček (M. N.): O souvislosti subdeterminantů (21-28).

JAHRGANG 1887:

Küpper: Ueber die auf einer Curve m^{ter} Ordnung vom Geschlecht p — C_p^m — von den ∞^2 Geraden G der Ebene ausgeschnittene lineare Schaar $g_m^{(2)}$ (477-485).
— Das Maximalgeschlecht der Regelflächen m^{ter} Ordnung (609-612).
Lerch: Addition au mémoire présenté dans la séance du 15 octobre 1886 (423-426).
— Počtářské odvození základního vzorce pro linearnou transformaci eliptické transcendenty $\vartheta_1(u|\tau)$ (426-432).
— Sur une démonstration du théorème de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires (673-682).
— Deux théorèmes d'arithmétique (683-688).
Longchamps (de): Rapprochement entre la Trisectrice de Mac-Laurin et la Cardioïde (601-608).
Seydler: Příspěvek k řešení Keplerova problemu (547-558).
— Další příspěvky k řešení Keplerova problemu (734-758).
Studnička: Neue Ableitung der Euler'schen Tangenten-und Cotangentenreihe (103-107).

Weyr (*Ed.*): Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices (616-618).

JAHRGANG 1888:

Hermite: Démonstration nouvelle d'une formule relative aux integrales Euleriénnes de seconde espèce (364-365).

Küpper: Zur Theorie der ebenen und Raumcurven. Die Curven C^{2n}, C^{2n+1} vom Maximalgeschlecht [bezw $(n-1)^2$, $n(n-1)$] mit Doppelpuncten (265-277).

Longchamps (*de*): Sur la transformation orthotangentielle dans le plan et dans l'espace (241-256).

Machovec: O zvláštní transformaci 3. stupně a o zvláštním kubickém komplexu paprskû při ní se vyskytujícím (104-137).

— Beiträge zur Construction der Tangenten und der Krummungsmittelpunkte ebener Curven (169-181).

Mannheim: Applications de géométrie cinématique (87-92).

Monin: Příspěvky ku stanovení rovin tečných k plochám mimosměrek (210-222).

Studnička: Ueber die allgemeine Auflösung der unbestimmten Gleichung zweiten Grades $axy + x^2 - y^2 = \pm 1$ (92-95).

— Neue Transformation einer homogenen quadratischen Form von n Variablen in die Summe von n Quadraten (256-265).

Sucharda: O suovislosti jistých ploch posouvání stupně čtvrtého s komplexními plochami obecného komplexu druhého stupně (381-387).

Teixeira: Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques (222-227).

Tesař: Note ueber die Tangenten und Singularitäten des Isophoten-Systems auf Rotationsflächen (355-364).

Vaněček (*M. N.*): O skupinach obrazcových (137-151).

— O resultantech (152-169).

— Způsob, kterým lze obdržeti číselné součinitele při členech resultant pouhým sčítáním (286-296).

— Vyčíslení resultantû dvou tvarû, z nichž jeden jest řádu třetího (296-304).

Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli.

SERIE II — VOL. II (ANNO XXVII, 1888).

(Ne sarà dato il sommario nel prossimo volume).

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München.

BAND XVIII — JAHRGANG 1888.

(Ne sarà dato il sommario nel prossimo volume).

Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserliche Akademie der Wissenschaften zu Wien.
XCVII. BAND — JAHRGANG 1888.
(Ne sarà dato il sommario nel prossimo volume).

Bullettino Meteorologico del R. Osservatorio di Palermo.
[*Vedi* t. II, pag. 79].

Communicazioni e protocolli delle Sedute della Società Matematica di Karkoff.
[*Vedi* t. II, pag. 27].

Mélanges Mathématiques et Astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie Impériale de St.-Pétersbourg.
[*Vedi* t. II, pag. 76].

Mémoires de la section mathématique de la Société des naturalistes de la Nouvelle Russie.
[*Vedi* t. II, pag. 44].

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.
[*Vedi* t. II, pag. 21].

Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL).
[*Vedi* t. II, pag. 22].

Wiskundige Opgaven (Amsterdam).
[*Vedi* t. II, pag. 73].
DERD DEEL 3, 4, 5, 6 STUK (1887-1889). — VIERDE DEEL: 1 ste STUK (1889).

Nieuw Archief voor Wiskunde (Amsterdam).
[*Vedi* t. II, pag. 73].
DEEL XIV: STUK 2 (1888). — DEEL XV: STUK 1, 2 (1888).

Pubblicazioni del R. Osservatorio di Palermo.
[*Vedi* t. II, pag. 79].

Raccolta matematica della Società Matematica di Mosca.
[*Vedi* t. II, pag. 74].

G.-B. G.

INDICE

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

PERVENUTE IN DONO AL CIRCOLO

PUBBLICAZIONI PERIODICHE

COLLE QUALI IL CIRCOLO SCAMBIA I SUOI *Rendiconti.*

Fine della Parte 2ª del Tomo III (1889)

Tip. Matematica di Michele Amenta, Palermo.